

Prediction of Permeability of Fractal Porous Media Using Monte Carlo Simulation

Mohammad Nakhaei^{*1}, Majid Altafi Dadgar²

Abstract

Porous media such as oil and gas reservoirs and groundwater aquifers, are highly heterogeneous. Modeling flow and transport in such porous media depends critically on accurate characterization of these media. In the present study, permeability of fractal porous media has been estimated using the Monte Carlo simulation. Using the results and measurements of previous studies on some sandstone samples, such as porosity, fractal dimension, limits of fractal property and intrinsic permeability, by applying a Monte Carlo probabilistic model to produce a set of random numbers between 0 and 1, pore diameters were obtained. Finally the sandstones permeability was determined and compared with measured values. Results showed that applying Monte Carlo simulation had no need of empirical coefficients, domain discretization and only with a few laboratories measured parameters one could reasonably determine the permeability of fractal porous media. A strong correlation ($R^2=0.83$) has been reached between measured and calculated permeability values.

Keywords: Fractal dimension, Monte Carlo, Permeability, Porous media.

Received: 2016/03/08
Accepted: 2016/08/19

تخمین نفوذپذیری ذاتی محیط متخلخل فرکتالی با روش مونت کارلو

محمد نخعی^{*}، مجید الطافی دادگر^۲

چکیده

محیط‌های متخلخل مانند آبخوان‌های آب زیرزمینی و یا مخازن گاز و نفت دارای ناهمگنی‌های زیادی هستند. مدلسازی جریان و انتقال در چنین محیط‌هایی بستگی به بررسی دقیق خواص محیط متخلخل دارد. در این پژوهش نفوذپذیری محیط متخلخل فرکتالی با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو تخمین زده شده است. بدین منظور با استفاده از نتایج و اندازه‌گیری‌های مطالعات قبلی بر روی چند نمونه ماسه سنگ مانند تخلخل، بعد فرکتالی، محدوده‌ی خاصیت فرکتالی و نفوذپذیری ذاتی، با مدل احتمالاتی مونت کارلو یک سری اعداد تصادفی بین ۰ تا ۱ تولید و اندازه قطر منافذ تعیین گردید. نهایتاً مقدار نفوذپذیری برای نمونه‌های ماسه سنگ شبیه‌سازی و با مقادیر اندازه‌گیری شده مقایسه گردید. نتایج نشان داد که مدل شبیه‌سازی مونت کارلو بدون نیاز به ضرایب تجربی، گسسته‌سازی مکانی و تنها با تعیین چند پارامتر مورد نیاز در آزمایشگاه، بخوبی قادر به شبیه‌سازی نفوذپذیری محیط متخلخل فرکتالی می‌باشد. همبستگی نسبتاً بالایی ($R^2=0.83$) بین مقادیر اندازه‌گیری شده و محاسبه شده نفوذپذیری حاصل شده است.

واژه‌های کلیدی: بعد فرکتالی، محیط متخلخل، مونت کارلو، نفوذپذیری ذاتی

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۱۲/۱۸
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۵/۲۹

1- Associate Professor, Faculty of Geological Sciences, Kharazmi University.
E-mail: nakhaei@khu.ac.ir
2- PhD candidate, Faculty of Geological Sciences, Kharazmi University.
*- Corresponding Author

۱- دانشیار هیدروژئولوژی، گروه زمین‌شناسی، دانشگاه خوارزمی.
۲- دانشجوی دکتری هیدروژئولوژی، دانشگاه خوارزمی.
*- نویسنده مسئول

مانند منافذ موجود در ماسه سنگ). با وجود چنین پیچیدگی در محیط متخلخل واقعی، مدل ماکروسکوپی معادل به شرطی وجود خواهد داشت که بین طول خواص ناهمگنی و طول خواص انتقال در نمونه مورد بررسی یک جدایش مقیاسی بتوان در نظر گرفت. به عبارت دیگر محیط متخلخل در یک دامنه مشخص از مقیاس، دارای خواص مشابهی باشد. محیط متخلخل فرکتالی قابلیت ایجاد چنین شرطی را دارد و خواص ماکروسکوپی جریان و انتقال در محیط می‌تواند با تئوری هندسه فرکتالی^۱ مطالعه گردد (مندلبورت (۱۹۸۲)). در همین رابطه کاتز و تامپسون (۱۹۸۵)، اولین کسانی بودند که با ارائه شواهد تجربی و آزمایشگاهی نشان دادند که فضای خالی در تعدادی نمونه ماسه سنگ خاصیت فرکتالی دارند و خاصیت خود همسان سازی^۲ خود را بین گستره طولی ۱۰ انگستر تا ۱۰۰ میکرومتر حفظ می‌کنند. این نتیجه گیری با پیش بینی نسبتاً دقیق تخلخل از بعد فرکتالی^۳، که با ترسیم تعداد منافذ (محور عمودی)، در مقابل اندازه منافذ (محور افقی) در نمودار تمام لگاریتمی حاصل شده است. نتایج کار این دو محقق منجر به ارائه رابطه زیر گردید:

$$\phi = C(l_1/l_2)^{3-D_f} \quad [1]$$

که در آن ϕ تخلخل نمونه ماسه سنگ، D_f بعد فراکتالی فضاهای خالی یا منافذ است که در حالت سه بعدی بین ۲ تا ۳ می‌باشد، C یک ثابت مرتبه اول و l_1 و l_2 به ترتیب حدود بالا و پایین ناحیه خودهمسان سازی محیط متخلخل است.

کرون و تامپسون (۱۹۸۶) بر روی تعدادی نمونه ماسه سنگ اندازه‌گیری‌هایی انجام دادند و برای ۵ نمونه ماسه سنگ بعد فراکتالی را در دامنه ۲/۵۵ تا ۲/۸۵ بدست آوردند. همچنین نتایج بررسی این دو محقق نشان داد که بیشتر نمونه‌های ماسه سنگ رفتار فرکتالی را در بیشتر دامنه های طولی نشان دادند. اسمیت و مونتر (۱۹۹۸) با مطالعات آزمایشگاهی بر روی نمونه های ماسه سنگ به این نتیجه رسیدند که منافذ خالی در ماسه سنگ‌ها فرکتال هستند و با استفاده از قانون مقیاس فرکتالی برای نمونه های ماسه سنگ بعد فرکتالی ۱/۸۹ (در دوبعد) را

محیط‌های متخلخل مانند آبخوان‌های آب زیرزمینی و مخازن گاز و نفت، در طول مقیاس‌های مختلف دارای ناهمگنی زیادی هستند. از این‌رو مدلسازی جریان و انتقال در چنین محیط‌هایی بستگی به بررسی دقیق خواص محیط به ویژه بر توزیع ناهمگنی آنها دارد. در چند دهه اخیر، خواص ماکروسکوپی جریان و انتقال محیط متخلخل در حالت اشباع و غیر اشباع مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است (کاتز و تامسون (۱۹۸۶)، گو و همکاران (۱۹۹۰)، کاراکان و هالک (۲۰۰۳)، لیو و همکاران (۲۰۰۴)).

خواص ماکروسکوپی جریان و انتقال در محیط متخلخل مانند مقاومت در برابر جریان، تراوایی و ضریب پراکندگی رابطه نزدیکی با ساختارهای میکروسکوپی محیط متخلخل دارند. چنین خواصی ممکن است به روش تجربی، روش‌های حل عددی و یا روش‌های تحلیلی تعیین گردند. با توجه به اینکه ساختار میکروسکوپی محیط متخلخل واقعی بسیار پیچیده است، تعیین خواص چنین محیطی با روش‌های تحلیلی بسیار مشکل خواهد بود. از این‌رو روش‌های تجربی و ارائه ضرایب و نمودارهای تجربی جهت ارزیابی خواص محیط مورد توجه قرار گرفت. اولین اندازه‌گیری تجربی برای جریان تک‌فازی در محیط متخلخل توسط داری انجام شد (یو (۲۰۰۸)). از آن پس مطالعات گوناگونی بر خواص محیط متخلخل برای جریان تک‌فازی و چندفازی صورت پذیرفت و منحنی‌های تجربی زیادی بدست آمد (بیر (۱۹۷۲)، سهمی (۱۹۹۵)، کاویانی (۱۹۹۵)، آدلر و توورت (۱۹۹۸)). اندازه‌گیری های تجربی معمولاً بر اساس انطباق نمودارها با یک یا چند ثابت تجربی است و مکانیسم جریان و انتقال در استخراج این ضرایب اغلب نادیده گرفته می‌شود. امروزه به منظور درک بهتر مکانیسم جریان در محیط متخلخل، حل تحلیلی برای خواص جریان و انتقال در محیط متخلخل مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته است. منافذ در محیط متخلخل واقعی می‌توانند دارای دامنه بسیار گسترده‌ای از نظر اندازه (منافذ بسیار بزرگ در حد متر و بسیار کوچک در حد نانومتر)، باشند. همچنین این منافذ ممکن است در سه بعد و برخی از آنها بهم متصل باشند. از طرف دیگر شکل منافذ در محیط واقعی کاملاً متفاوت و بستگی به نوع مواد تشکیل دهنده محیط دارند

1- Fractal geometry
 2- Self-similarity
 3- Fractal dimension

با استفاده از روش شمارش جعبه^۱ بدست آوردند. مطالعات صورت گرفته حاکی از آن است که محیط متخلخل نیز مانند سایر پدیده های طبیعی از قانون توان فرکتالی پیروی می نماید. همچنین مطالعاتی بر روی محیط متخلخل خاک صورت گرفته است که فرکتال بودن این محیط را اثبات نموده است. تیلور و ویتکرفت (۱۹۸۹)، ریاضیات فرکتالی را برای آنالیز رطوبت خاک بکار بردند و به این نتیجه رسیدند که پارامتر α در مدل منحنی رطوبت خاک ارائه شده توسط آریا و پاریس (۱۹۸۱)، برابر با بعد فرکتالی منافذ است. پرفکت و کی (۱۹۹۱) ماهیت فرکتالی خاک را مورد بررسی قرار دادند و بعد فرکتالی را از ترسیم داده های توزیع تجمعی اندازه ذرات در مقیاس لگاریتمی بدست آوردند. پرییر و همکاران (۱۹۹۶) یک مدل کلی نگهداشت رطوبت خاک را برای خاک هایی که توزیع اندازه ذرات آنها فرکتالی است ارائه دادند. در تحقیقات جدیدتر دینرت (۲۰۰۸) مدل نگهداشت رطوبت خاک مشابه با مدل ارائه شده توسط پرییر و همکاران (۱۹۹۶) ارائه داده است. این مدل از قاعده ی ترمودینامیک برای فشار کاپیلاری تعادلی استفاده می کند. آنها همچنین به این نتیجه رسیدند که یک تابع قانون توانی^۲ تنها برای شرایط تعادلی صحت دارد. هانت و اوینگ (۲۰۰۹) نشان دادند که یک تابع توان بخوبی قادر به نمایش بخش های انتهایی منحنی نگهداشت رطوبت خاک در شرایط خشک و اشباع است. مطالعات زیادی جهت بررسی خاصیت فرکتالی محیط های متخلخل صورت پذیرفته است. یو و همکاران (۲۰۰۲) اندازه گیری هایی را بر روی ساختار منافذ بافت^۳ انجام دادند و نشان دادند که منافذ در بافت خاک از قانون فرکتال پیروی می کند و بعد فرکتالی در فضای منفذی به عنوان تابعی از پارامترهای ساختار میکروسکوپی تعیین گردید. یو و چنگ (۲۰۰۲) در مطالعه دیگری نشان دادند که محیط متخلخل دوگانه^۴ که توزیع دانه ها در آن به شکل آگومرا (تجمع دانه های ریز و ایجاد دانه های درشتتر) است نیز از قانون فرکتال پیروی می نماید. آنها به این نتیجه رسیدند که چون آگومراها و دانه های ریز تشکیل دهنده آنها به صورت تصادفی در محیط متخلخل توزیع شده اند، توزیع منافذ

ماکروسکوپی و میکروسکوپی نیز به صورت تصادفی است. آنها ثابت کردند که هندسه فرکتالی قابلیت توصیف ماهیت منافذ و جریان را دارا می باشد. یو و همکارانش (۲۰۰۵)، نفوذپذیری یک محیط متخلخل فرکتالی تشکیل شده از مس و فضای خالی را که توزیع آن بصورت دوگانه بود، با استفاده از روش مونت کارلو^۵ بدست آوردند. آنها ابتدا با استفاده از روش جعبه شمارش، بعد فراکتالی را برای محیط متخلخل بدست آوردند و سپس با استفاده از روش شبیه سازی مونت کارلو مقدار نفوذپذیری ذاتی محیط را بدست آوردند. ژو و یو (۲۰۰۸) در مطالعات خود نشان داده اند که هندسه فرکتالی ممکن است پتانسیل تحلیل جریان و خواص انتقال در محیط متخلخل را دارا باشد. در تحقیق دیگری ژو و همکارانش (۲۰۱۲)، تراوایی نسبی محیط غیر اشباع را با استفاده از روش فراکتالی محاسبه نمودند. آنها از روش شبیه سازی مونت کارلو جهت توزیع فضای خالی در محیط متخلخل استفاده کردند. در مطالعات صورت گرفته در گذشته از روش فرکتالی جهت محاسبه تخلخل، پارامترهای منحنی نگهداشت خاک و پارامترهای هیدرولیکی محیط متخلخل استفاده شده است. در بیشتر این مطالعات تخمین پارامترهای هیدرولیکی خاک تنها با محاسبه ی بعد فرکتالی توزیع اندازه ذرات خاک صورت پذیرفته است. برخی از این مطالعات از روش مونت کارلو جهت شبیه سازی توزیع تصادفی اندازه حفرات در محیط متخلخل غیر از خاک استفاده و پارامترهای هیدرولیکی این محیط را محاسبه نموده اند (یو و همکاران (۲۰۰۵)).

در پژوهش حاضر کارایی روش مونت کارلو جهت شبیه سازی توزیع اندازه قطر منافذ در محیط متخلخل فرکتالی ماسه سنگ سنجیده شده است. در نهایت نفوذپذیری ذاتی نمونه های ماسه سنگ محاسبه شده و با مقادیر اندازه گیری شده مقایسه شده است.

مبانی ریاضیات فرکتالی و قاعده ریاضی روش مونت کارلو
مطابق رابطه ۲، ویژگی مهم عوارض فرکتالی، مستقل بودن واحد یا مقیاس اندازه گیری و تبعیت از قانون توان می باشد.

$$M(L) \sim L^D f \quad [2]$$

- 1- Box-counting
- 2- Power-law
- 3- Porous fabrics
- 4- Bi-dispersed

5- Monte Carlo

در روابط فوق D_f بین ۱ تا ۲ در فضای دوبعدی و بین ۲ تا ۳ در فضای سه بعدی متغیر می‌باشد. همانطور که در بخش‌های قبلی اشاره شد کاتز و تامپسون (۱۹۸۵) اولین کسانی بودند که با ارائه شواهد تجربی و آزمایشگاهی نشان دادند که فضای خالی در تعدادی نمونه ماسه سنگ خاصیت فراکتالی دارند و خاصیت خود همسان سازی خود را بین گستره طولی ۱۰ انگستریم تا ۱۰۰ میکرومتر حفظ می‌کنند (رابطه ۱). بر این اساس یو و لی (۲۰۰۱) بین تخلخل محیط (\emptyset) و بعد فرکتالی رابطه ۵ را ارائه داده‌اند و از آنجا بعد فرکتالی را مطابق رابطه ۶ محاسبه نمودند.

$$\emptyset = (\lambda_{min} / \lambda_{max})^{d-D_f} \quad [5]$$

$$D_f = d - \frac{\ln \emptyset}{\ln \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} \quad [6]$$

که در آن d بعد اقلیدوسی (بعد هندسه منظم) برای فضای دوبعدی و سه بعدی به ترتیب برابر ۲ و ۳ می‌باشد. اگر $d=3$ باشد، رابطه ۶ مشابه رابطه ۱ با ضریب $C=1$ است. این تشابه نشان می‌دهد که معادله فوق نه تنها برای محیط فرکتالی کاملاً خودهمسان ساز است بلکه برای محیط فرکتالی آماری (توزیع تصادفی اندازه منافذ) نیز برقرار می‌باشد. در این معادله λ_{max} بزرگترین اندازه منافذ در سلول نماینده حجمی است و در واقع λ_{max} در این معادله همان مفهوم l_2 در رابطه ۱ را دارد. بر طبق مطالعات یو و فنگ (۲۰۰۵) اگر از رابطه ۳ مشتق گرفته و حاصل را بر رابطه ۴ تقسیم نماییم تابع چگالی احتمال مطابق رابطه ۷ بدست خواهد آمد:

$$-\frac{dN}{N_t} = D_f \lambda_{min}^{d_f} \lambda^{-(D_f+1)} d\lambda = f(\lambda) d\lambda \quad [7]$$

در رابطه ۷ $f(\lambda) = D_f \lambda_{min}^{d_f} \lambda^{-(D_f+1)}$ تابع چگالی احتمال است و $f(\lambda) \geq 0$ است. در نتیجه مقدار کل احتمال جمع‌ی باید بصورت زیر برقرار گردد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} f(\lambda) d\lambda = 1 - \left(\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right)^{D_f} \equiv 1 \quad [8]$$

انتگرال‌گیری از رابطه ۸ نشان می‌دهد که رابطه ۸ تنها زمانی برقرار است که $\left(\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right)^{D_f} \cong 0$ باشد. این رابطه نشان می‌دهد که برای تحلیل فرکتالی محیط متخلخل بایستی $\lambda_{min} \ll \lambda_{max}$ باشد. در غیر اینصورت محیط متخلخل، محیط فرکتالی نمی‌باشد. از رابطه بالا به عنوان معیار در محیط متخلخل استفاده می‌شود. بدین معنی که اگر رابطه فوق برای محیط متخلخل برقرار باشد می‌توان خصوصیات محیط

در اینجا M می‌تواند طول یک خط یا مساحت یک سطح باشد. معادله فوق به خاصیت خودهمسان سازی اشاره دارد. این بدان معنی است که مقدار D_f در رابطه فوق در دامنه طول مقیاس‌های مختلف ثابت می‌ماند. ساختارهای هندسی مانند منحنی کوخ^۱ و سیرپینسکی کارپت^۲ مثال‌هایی از ساختارهای فرکتالی خودهمسان ساز کامل هستند. به عبارت دیگر چنین ساختارهایی خاصیت فرکتالی (خودهمسان سازی) خود را در دامنه نامحدودی از طول مقیاس‌های (L) مختلف حفظ می‌کنند (مندلبورت (۱۹۸۲)). به هر حال فرکتال‌های این چینی که دقیقاً خودهمسان ساز هستند به ندرت در طبیعت یافت می‌شوند. در طبیعت عوارض متعددی یافت می‌شوند که خاصیت خودهمسان سازی آنها به شکل آماری^۳ و تصادفی است. این مفهوم اشاره می‌کند که چنین عوارضی خاصیت خودهمسان سازی خود را در مفهوم میانگین و بر یک دامنه موضعی و مشخص از طول مقیاس (L) تکرار می‌نمایند. برای مثال توزیع تجمعی اندازه جزایر در سطح کره زمین از قانون توان‌ها $(N(A > a) \sim a^{-D/2})$ پیروی می‌کند (مندلبورت (۱۹۸۲))، که در اینجا N تعداد کل جزایر دارای مساحت (A) بزرگتر از a است و D بعد فرکتالی سطح است. توزیع اندازه منافذ در محیط متخلخل نیز مشابه توزیع اندازه جزایر یا دریاها در سطح زمین است. بنابراین توزیع تجمعی اندازه منافذ در محیط متخلخل به صورت رابطه ۳ از قانون توان‌ها پیروی می‌نماید (یو و لی (۲۰۰۱)).

$$N(L \geq \lambda) = \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda}\right)^{D_f} \quad [3]$$

در اینجا D_f همانند رابطه ۲ بعد فرکتالی است. طبق رابطه ۳ وقتی $\lambda \rightarrow 0$ میل می‌کند تعداد منافذ به سمت بینهایت میل می‌کند که یکی از خواص محیط فرکتالی است. روابط ۲ و ۳ برای هر دو محیط فرکتالی کامل و فرکتالی آماری برقرار است. تعداد کل منافذ یا جزایر از کوچکترین قطر (λ_{min}) تا بزرگترین قطر (λ_{max}) از رابطه ۴ قابل محاسبه می‌باشد (یو و لی (۲۰۰۱)):

$$N_t(L \geq \lambda_{min}) = \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)^{D_f} \quad [4]$$

1- Koch curve
 2- Sierpinski carpet
 3- Statistically self-similar

(λ_{min}) و یا نسبت این دو مشخص باشد، با استفاده از رابطه ۱۲ محاسبه نمود.

اگر قطر یک حفره موئین (لوله) در محیط متخلخل برابر با λ باشد و طول پیچاپیچی^۱ آن در امتداد خط جریان $L_t(\lambda)$ باشد، به سبب ماهیت پیچاپیچی حفرات موئین، $L_t(\lambda) = \lambda^{(1-D_T)} L_0^{D_T}$ که بعد فرکتالی پیچاپیچی است که در حالت دوبعدی بین ۱ تا ۲ است. نرخ جریان از لوله موئین پیچاپیچ از معادله اصلاح شده هیگن-پویسوله بصورت رابطه ۱۳ می‌باشد.

$$q(\lambda) = G \frac{\Delta P}{L_t(\lambda) \mu} \lambda^4 \quad [13]$$

در این رابطه $G = \pi/128$ فاکتور هندسی برای جریان عبوری از یک لوله موئینه حلقوی است، μ ویسکوزیته سیال، ΔP گرادیان فشار است. اگر کل جریان عبوری از میان یک سلول واحد و عمود بر سطح A را محاسبه کنیم، برابر با مجموع کل جریان (Q) از میان هر لوله $q(\lambda_i)$ خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$Q = \sum_{i=1}^J q(\lambda_i) = \sum_{i=1}^J G \left(\frac{\Delta P A}{L_0 \mu} \right) \frac{L_0^{1-D_T}}{A} \lambda_i^{3+D} = G \left(\frac{\Delta P A}{L_0 \mu} \right) \frac{L_0^{1-D_T}}{A} \sum_{i=1}^J \lambda_i^{3+D_T} \quad [14]$$

در اینجا L_0 طول نماینده یک سلول واحد است و تقریباً برابر است با: $L_0 = \sqrt{A}$. از مقایسه قانون داری با معادله فوق، نفوذپذیری می‌تواند به شکل رابطه ۱۵ بیان گردد (یو و فنگ (۲۰۰۵)):

$$K = G \frac{L_0^{1-D_T}}{A} \sum_{i=1}^J \lambda_i^{3+D_T} \quad [15]$$

مساحت سطح مقطع جریان A از یک سلول واحد برابر خواهد بود $A = A_p / \phi$ که در آن A_p مساحت کل منافذ خالی در یک سلول واحد است که از رابطه ۱۶ بدست می‌آید:

$$A_p = \sum_{i=1}^J a_i = \sum_{i=1}^J \pi \lambda_i^2 / 4 \quad [16]$$

در اینجا a_i مساحت سطح مقطع لوله موئین نام است که با روش شبیه سازی مونت کارلو انتخاب می‌شود (رابطه ۱۲). اندازه بزرگترین و کوچکترین حفرات در محیط متخلخل بستگی به نوع محیط متخلخل دارد و می‌تواند از روش آنالیز تصویر^۲ یک نمونه در آزمایشگاه بدست آید. مقدار بعد فرکتالی (D_f) نیز قابل محاسبه از رابطه ۶، برای تخلخل مورد نظر می-

متخلخل را با استفاده از تئوری فرکتالی بررسی نمود. در حالت کلی در محیط متخلخل شرط $10^{-2} < \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$ و شرط فوق تقریباً برقرار می‌گردد، در صورت قبول این تئوری، روش فرکتالی برای آنالیز خواص محیط متخلخل قابل استفاده می‌باشد (یو و لی (۲۰۰۱)). در این حالت احتمال تجمعی (R) در دامنه $\lambda_{min} \sim \lambda$ می‌تواند از رابطه ۹ محاسبه گردد.

$$R(\lambda) = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda} f(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda} D_f \lambda_{min}^{D_f} \lambda^{-(D_f+1)} d\lambda = 1 - \left(\frac{\lambda_{min}}{\lambda} \right)^{D_f} \quad [9]$$

رابطه ۹ نشان می‌دهد که وقتی $\lambda \rightarrow \lambda_{min}$ میل کند $R=0$ است و وقتی $\lambda \rightarrow \lambda_{max}$ میل کند، $R \approx 1$ است. با توجه به اینکه توزیع اندازه منافذ (λ) در محیط متخلخل در دامنه $\lambda_{min} \sim \lambda_{max}$ بصورت کاملاً تصادفی است، مقدار R در رابطه ۹ در دامنه صفر تا یک قرار می‌گیرد و بنابراین مقادیر R تقریباً منطبق بر یک سری اعداد تصادفی بین صفر و یک می‌باشد (یو و فنج (۲۰۰۵)). پس با استفاده از معادله ۹ خواهیم داشت:

$$1 - R = \left(\frac{\lambda_{min}}{\lambda} \right)^{D_f} \quad [10]$$

اگر رابطه فوق را برای اندازه منافذ (λ) حل کنیم، خواهیم داشت:

$$\lambda = \frac{\lambda_{min}}{(1-R)^{1/D_f}} = \left(\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} \right) \frac{\lambda_{max}}{(1-R)^{1/D_f}} \quad [11]$$

که در آن $\lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}$ است. رابطه ۱۱، یک مدل احتمال برای اندازه منافذ است که از آن جهت شبیه سازی به روش مونت کارلو استفاده می‌شود. در محیط متخلخل برای انتخاب لوله موئین نام که به صورت تصادفی انتخاب می‌شود، رابطه ۱۱ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\lambda_i = \frac{\lambda_{min}}{(1-R_i)^{1/D_f}} = \left(\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} \right) \frac{\lambda_{max}}{(1-R_i)^{1/D_f}} \quad [12]$$

در اینجا $i=1,2,3,\dots,J$ است و J تعداد کل اعداد حاصل از شبیه سازی مونت کارلو در یک اجرا با تخلخل معین است. رابطه فوق به این نکته اشاره دارد که چون اعداد تصادفی بین ۰ تا ۱ است که توسط کامپیوتر ایجاد می‌شود، بنابراین اندازه منافذ نام نیز به صورت تصادفی انتخاب می‌گردد. از طرف دیگر رابطه ۱۲ بر مبنای رابطه ۳ است، بنابراین رابطه فوق هم تصادفی بودن توزیع حفرات و هم توزیع فرکتالی آنها را شبیه سازی می‌نماید (یو و فنج (۲۰۰۵)). بنابراین می‌توان یک سری اعداد تصادفی از R انتخاب کرد و اندازه حفرات را در صورتی که اندازه بزرگترین حفره (λ_{max}) و کوچکترین حفره

1- Tortuous
2- Image Analysis

است، با استفاده از روش مونت کارلو ارائه می شود. قابل ذکر است که یو و همکاران (۲۰۰۵) الگوریتم خود را جهت بررسی تراوایی محیط متخلخل موجود در ذرات مس ارائه داده و در پژوهش حاضر از این روش جهت محاسبه نفوذپذیری ذاتی نمونه‌های ماسه‌سنگ استفاده شده است. در ادامه از نتایج موجود در جدول ۱ و با در نظر گرفتن محیط متخلخل واقعی در نمونه‌های ماسه‌سنگ، الگوریتم محاسبه نفوذپذیری ذاتی در این نمونه‌ها ارائه می‌شود.

جدول ۱- خواص نمونه‌های ماسه سنگ استفاده شده برای محاسبه نفوذپذیری (اقتباس از کرون و تامپسون (۱۹۸۶)).

ردیف	نمونه	تخلخل (درصد)	نفوذپذیری (میلی داری)	بعد فرکتالی	λ_{max} (میکرومتر)*
۱	Berea	۲۰	۱۲۳	۲/۸۵	>۳۲
۲	Coconino	۹/۹	۰/۰۳۷	۲/۷۵	>۵۰
۳	Navajo	۱۸	۲۴۶	۲/۷۴	>۵۰
۴	St. Peter's	۹/۳	۵/۱۵	۲/۶۱	۱۸
۵	Blackhawk	۴/۳	۰/۰۲	۲/۵۹	۲۰

* در برخی نمونه‌ها حد λ_{max} (حد بالایی خواص فرکتالی) با علامت > نشان داده شده که اشاره به عدم دیده شدن حد بالایی خواص فرکتالی با داده‌های SEM است. بنابراین داده‌های SEM حد پایینی خواص فرکتالی را جایگزین کرده است.

الگوریتم محاسبه نفوذپذیری ذاتی نمونه‌های ماسه-سنگ در زیر خلاصه شده است.

- ۱- با استفاده از تخلخل (\emptyset) اندازه‌گیری شده و بعد فرکتالی (D_f) محاسبه شده به روش جعبه شمارش، نسبت $\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$ را با رابطه ۵ تعیین می‌کنیم.
- ۲- با روش شبیه‌سازی مونت کارلو یک سری اعداد تصادفی یا رندوم (R_i) بین ۰ و ۱ ایجاد می‌نماییم.
- ۳- با استفاده از رابطه ۱۲، منافذ با قطر تصادفی (λ_i)، را محاسبه می‌نماییم.
- ۴- اگر $\lambda_i > \lambda_{max}$ بود، به مرحله ۳ برگشته و قطر تصادفی دیگری را انتخاب می‌نماییم. در غیر اینصورت به مرحله بعد می‌رویم.

باشد یا از روش جعبه شمارش قابل تعیین است. بعد فرکتالی برای پیچاپیچی خطوط جریان (D_f) از روش جعبه شمارش یا روش شبیه سازی مونت کارلو قابل تعیین است. با استفاده از روش شبیه سازی مونت کارلو، ویت گرفت و تیلر (۱۹۸۸) برای جریان از میان محیط ناهمگن مقدار $D_f=1.087$ بدست آوردند. همچنین یو و چنگ (۲۰۰۲) با بکار گیری روش جعبه شمارش برای اندازه گیری دسته‌ای از خطوط جریان در یک محیط متخلخل $D_f=1.10$ بدست آوردند. در این مقاله نیز مقدار اخیر برای بعد فرکتالی پیچیش خطوط جریان استفاده می شود. همانطور که اشاره شد، توزیع منافذ در محیط متخلخل بصورت تصادفی می‌باشد. بنابراین جهت شبیه‌سازی توزیع اندازه‌ی منافذ در محیط متخلخل ابتدا از روش مونت کارلو برای تولید اعداد تصادفی استفاده و سپس با استفاده از روابط ذکر شده توزیع اندازه ذرات برای هر عدد تصادفی محاسبه و مقدار نفوذپذیری محیط متخلخل تخمین زده شده است.

نتایج و بحث

کرون و تامپسون (۱۹۸۶)، با ارائه یک روش خودکار، مقدار بعد فرکتالی چند نمونه ماسه سنگ را به طور نسبتاً دقیقی محاسبه کرده‌اند. مبنای این روش بر اساس اسکن الکترونی تصاویر میکروسکوپی^۱ (SEM) از سطوح درزو شکاف است که شامل رقوم سازی تصاویر، فیلترینگ، شمارش عوارض هندسی به عنوان تابعی از اندازه آنها و برازش هیستوگرام عوارض است. نتایج حاصل از این روش برای چند نمونه ماسه سنگ، نشان داد که بعد فرکتالی این نمونه‌ها بین ۲/۵۹ تا ۲/۸۵ متغیر است. جدول ۱ خلاصه‌ای از خواص نمونه‌های ماسه سنگ و بعد فرکتالی محاسبه شده برای هر نمونه را نشان می‌دهد. با توجه به جدول ۱ رابطه مستقیمی بین تخلخل ذرات و بعد فرکتالی آنها دیده می‌شود. به عبارت دیگر با افزایش مقدار تخلخل، مقدار بعد فرکتالی نمونه‌ها بیشتر می‌شود (به استثنای ردیف دوم). از نتایج جدول ۱ جهت مقایسه با مقدار نفوذپذیری محاسبه شده با استفاده از روش مونت کارلو استفاده شده است. بدین منظور ابتدا مراحل الگوریتم ارائه شده توسط یو و همکاران (۲۰۰۵) که جهت تعیین مقدار تراوایی محیط متخلخل دوگانه که توزیع دانه‌ها در آن به شکل آگلومرا

1- Scanning-electron-microscope

های ماسه سنگ با استفاده از مدل احتمال در رابطه ۱۲ نشان می‌دهد. همانطور که در شکل ۱ پیداست، تعداد منافذ بزرگ، بسیار کمتر از منافذ کوچک است که این امر با تئوری فرکتالی کاملاً همخوانی دارد. همچنین با کاهش تخلخل اندازه‌ی بزرگترین منافذ در نمونه‌ها کاهش می‌یابد.

پس از شبیه سازی اندازه قطر منافذ به شکل تصادفی، با استفاده از الگوریتم شرح داده شده و از رابطه ۱۵ مقدار نفوذپذیری ذاتی برای هر نمونه ماسه‌سنگ محاسبه گردیده است. در شکل ۲ نفوذپذیری محاسبه شده از روش مونت کارلو را برای ماسه سنگ شماره ۲، با ۱۰۰۰ بار اجرای مدل نشان می‌دهد.

با توجه به شکل ۲ مقدار نفوذپذیری شبیه‌سازی شده در پیرامون مقدار ۳۰ میکرو داریسی نوسان می‌کند. اما مقدار متوسط نفوذپذیری برای این نمونه ماسه‌سنگ برابر با ۰/۰۳۱ میلی داریسی یا ۳۱/۲ میکرو داریسی می‌باشد. با توجه به توزیع تصادفی اندازه‌ی منافذ در محیط متخلخل بخوبی می‌توان این موضوع را درک نمود. به عبارت دیگر نوسانات مقدار نفوذپذیری با فیزیک واقعی محیط متخلخل همخوانی دارد، زیرا در یک محیط متخلخل واقعی با توزیع تصادفی اندازه‌ی منافذ، منافذ بزرگتر دارای نفوذپذیری بیشتر و منافذ کوچکتر دارای مقدار نفوذپذیری کوچکتری هستند. این موضوع می‌تواند دلیلی بر آن باشد که محاسبه نفوذپذیری چنین محیطی با استفاده از روش‌های حل تحلیلی قادر به توصیف شفاف و قابل درک پدیده‌های فیزیکی در محیط متخلخل نمی‌باشد. همچنین شکل‌های ۱ و ۲ نشان می‌دهند که شبیه‌سازی مونت کارلو قادر به ارائه درک شفاف‌تری از توزیع تصادفی اندازه‌ی منافذ و نمایش نوسانات نفوذپذیری بر مبنای مدل احتمالاتی (رابطه ۱۲) برای قطر منافذ است. با وجود انتخاب تصادفی منافذ و نوسانات نسبتاً شدید مقدار نفوذپذیری، با تعداد اجراهای کافی، مدل برای تعیین مقدار نفوذپذیری همگرا خواهد بود. جدول ۲ مقادیر نفوذپذیری محاسبه شده برای نمونه‌های ماسه‌سنگ را در اجراهای مختلف مدل نشان می‌دهد. با توجه به جدول ۲ مقدار نفوذپذیری در اجراهای مکرر و بالا به مقادیر اندازه‌گیری شده نزدیک‌تر است و در اجراهای بالاتر از ۱۰۰۰ بار تقریباً مقدار نفوذپذیری به مقدار ثابتی نزدیک شده است و به مقادیر اندازه‌گیری شده (جدول ۱) نزدیک است. بنابراین شبیه سازی به

۵- مقدار A_p را از رابطه ۱۶ محاسبه می‌نماییم.
۶- در نهایت مقدار نفوذپذیری را از رابطه ۱۵، محاسبه می‌کنیم. مقدار بعد فرکتالی پیچاپیچی خط جریان $D_T=1.1$ در نظر گرفته می‌شود.

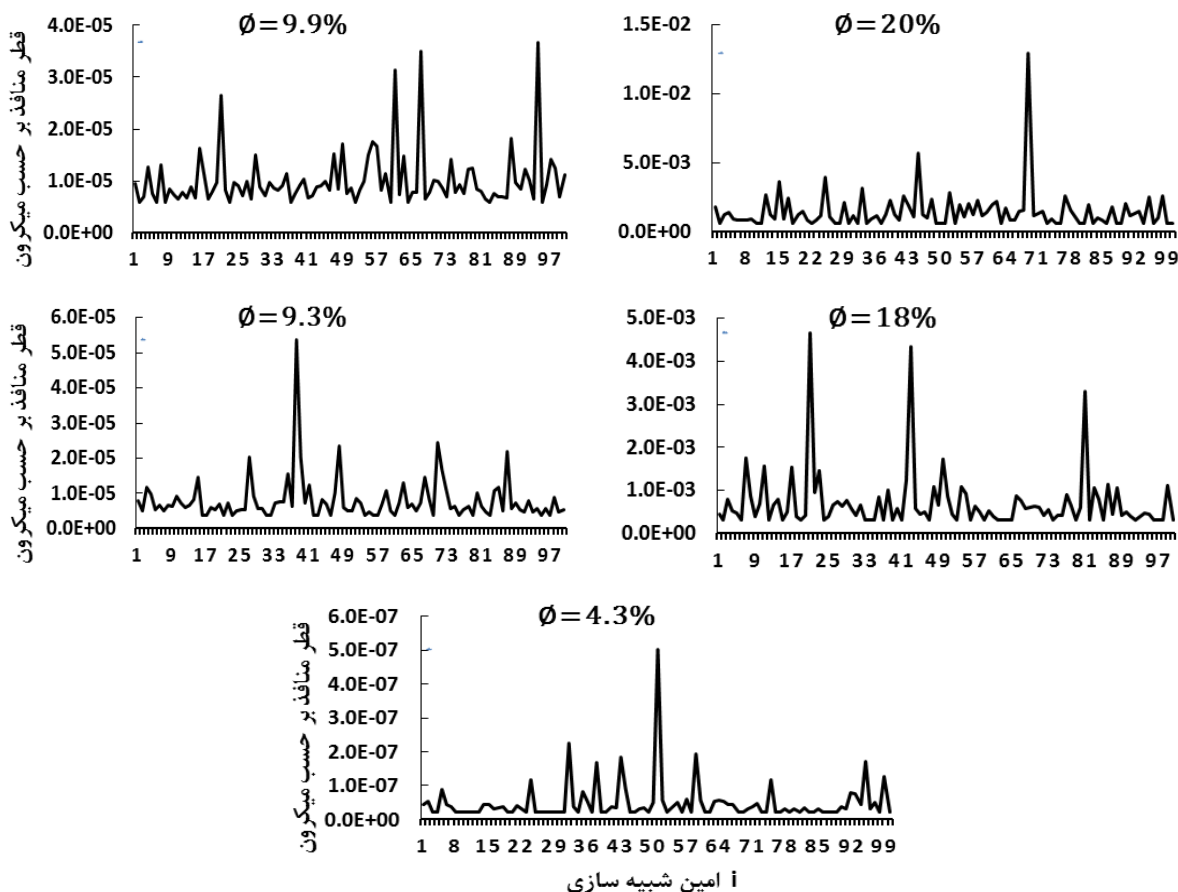
مرحله ۴ بیانگر آن است که انتخاب اندازه حفرات به شکل تصادفی از روش مونت کارلو نباید از بزرگترین قطر حفرات تجاوز نماید. مراحل ۳ تا ۶ را برای محاسبه نفوذپذیری تکرار می‌شود تا برای تخلخل داده شده مدل همگرا گردد. معیار همگرایی مدل زمانی حاصل می‌شود که برای J امین شبیه‌سازی مقدار $A_J=(A_p/\phi)>A$. در این حالت شبیه سازی متوقف می‌شود. سپس مقدار نفوذپذیری نهایی و تعداد شبیه سازی (J) در یک اجرای مدل ثبت می‌گردد. در رابطه بالا A_J مساحت کل سطح محاسبه شده بعد از J امین محاسبه در یک اجرای مدل و A مساحت سطح سلول است که واحد در نظر گرفته می‌شود (تخلخل برحسب درصد است). نفوذپذیری همگرا شده در هر اجرا (N) را ثبت می‌نماییم و در نهایت متوسط نفوذپذیری برای تخلخل معین به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$K = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N K_n \quad [17]$$

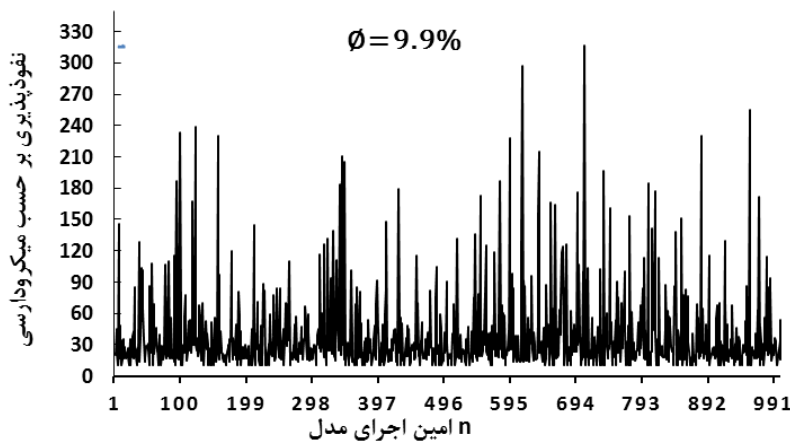
که در آن N تعداد کل اجراهای مدل برای تخلخل معین است. یو و فنگ (۲۰۰۵) در مطالعه خود نشان دادند که برای اجراهای بالاتر از ۱۰۰۰ بار، تغییرات K بسیار ناچیز خواهد شد و می‌توان مقدار نفوذپذیری بدست آمده در اجراهای بالاتر از ۱۰۰۰ بار را پذیرفت. تعیین نفوذپذیری از طریق الگوریتم فوق نسبتاً ساده است و محاسبات برای اجراهای بالاتر از ۱۰۰۰ بار تنها چند دقیقه طول می‌کشد. در این روش برخلاف روش‌های عددی نیازی به ایجاد شبکه و گسسته سازی آن، تعیین شرایط مرزی و محاسبات حوزه‌ی جریان نیست. همچنین روش‌های عددی برای حل معادلات حوزه‌ی جریان در مقیاس میکروسکوپی باید دسته‌ای از معادلات گسسته شدهی نویر-استوک^۱ را حل نمایند که نسبتاً وقت‌گیر و زمان‌بر است. با استفاده از الگوریتم فوق و رابطه ۵ مقدار $\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$ برای هریک از نمونه‌های ماسه‌سنگ محاسبه شد. سپس با تولید اعداد تصادفی به روش مونت کارلو و رابطه ۱۲ توزیع منافذ با قطر تصادفی برای هر نمونه حاصل شده است. شکل ۱ اندازه قطر منافذ انتخابی به شکل تصادفی تا صدمین شبیه‌سازی را برای نمونه-

1- Navier-Stokes

روش مونت کارلو به استثنای نمونه شماره ۳، نسبتاً دقیق بوده است.



شکل ۱- اندازه قطر منافذ شبیه سازی شده با روش مونت کارلو برای نمونه های ماسه سنگ.



شکل ۲- نفوذپذیری شبیه سازی شده با روش مونت کارلو در ۱۰۰۰ بار اجرای مدل (نمونه شماره ۲)).

منافذ، مقدار نفوذپذیری برای هر نمونه ماسه سنگ با دقت نسبتاً مناسبی برآورد گردیده است. در روش ارائه شده هیچ گونه ضریب تجربی برای برآورد نفوذپذیری استفاده نمی‌شود و تمامی پارامترها دارای مفهوم فیزیکی مشخصی هستند. صحت مدل بکار رفته جهت شبیه سازی نفوذپذیری با مقایسه با مقادیر اندازه‌گیری شده در مطالعات قبلی سنجیده شده است و مقادیر اندازه‌گیری شده و محاسبه شده با همبستگی ۸۳ درصد بر هم منطبق می‌باشند. بنابراین با اندازه‌گیری چند پارامتر در آزمایشگاه و بدون نیاز به ساختن شبکه یا گسسته سازی و تعریف شرایط مرزی و حتی محاسبات در حوزه‌ی جریان، می‌توان نفوذپذیری ذاتی را با دقت نسبتاً قابل قبولی شبیه سازی نمود. در پژوهش حاضر جهت محاسبه‌ی مقدار نفوذپذیری ذاتی در روابط، بعد فرکتالی ضریب پیچاپیچی ثابت و برابر با $D_T=1.1$ استفاده شده است. با توجه به اینکه هر چقدر بعد فرکتالی ضریب پیچاپیچی بیشتر باشد، مقدار پیچش لوله‌های موئین در محیط متخلخل بیشتر و در نتیجه نفوذپذیری کاهش خواهد یافت. بنابراین بررسی اثر تغییرات ضریب پیچاپیچی بر مقدار نفوذپذیری در کارهای آینده پیشنهاد می‌شود.

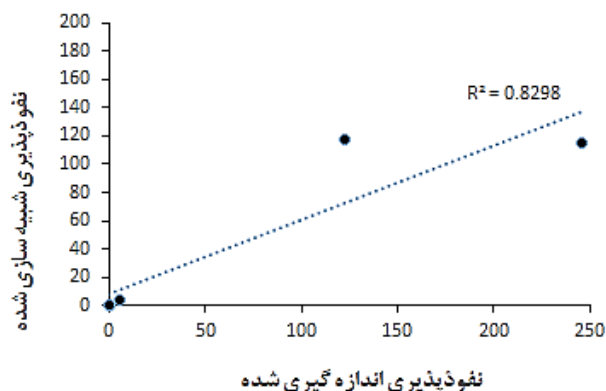
منابع

- Adler, P.M., Thovert, J.F., 1998. *Real porous media: local geometry and macroscopic properties. Appl. Mech. Rev.*, 51, 537-585.
- Arya, L.M., Paris, J.F., 1981. *A physic empirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data, Soil Sci. Soc. Am. Journal*, 45, 1023-1030.
- Bear, J., 1972. *Dynamics of fluids in porous media. Elsevier, New York*, 764 p.
- Deinert, M.R., Dathe, A., Parlange, J-Y., Cady, K.B., 2008. *Capillary pressure in a porous medium with distinct pore surface and pore volume fractal dimensions. Phys. Rev. E. Vol. 77, No.13, doi/10.1103/PhysRevE.77.021203.*
- Guo, S.P., Huang, Y.Z., Zou, J., Hu, Y., Zou, Y.R., Yu, D.S., 1990. *Microscopic mechanisms of physical-chemical seepages, Sci.*, 25,1305-1312, Beijing,China.
- Hunt, A., Ewing, R., 2009. *Percolation theory for flow in porous media. 2nd ed. Springer, Berlin, Germany.* 319 p.
- Karacan, C.Q., Halleck, P.M., 2003. *A fractal model for predicting permeability around perforation*

شکل ۳ مقادیر نفوذپذیری شبیه سازی شده با روش مونت کارلو را در مقابل مقادیر اندازه‌گیری شده نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۳ مقدار نفوذپذیری شبیه‌سازی شده دارای همبستگی نسبتاً بالایی در مقایسه با مقادیر اندازه‌گیری شده است و صحت تکنیک شبیه‌سازی مونت-کارلو را اثبات می‌نماید.

جدول ۲- مقادیر نفوذپذیری شبیه سازی شده در اجرای های مختلف با روش مونت کارلو.

ردیف	نمونه	۱۰ بار اجرا	۱۰۰ بار اجرا	۱۰۰۰ بار اجرا	۱۰۰۰۰ بار اجرا
۱	Berea	۱۰۱/۲	۹۶/۰۸	۱۱۸	۱۱۸/۳
۲	Coconino	۰/۰۹۲	۰/۰۳۰۶	۰/۰۳۱	۰/۰۳۱۲
۳	Navajo	۹۷/۲۱	۵۰/۲	۱۱۵/۲۴	۱۲۱/۶۵
۴	St. Peter's	۳/۵۲	۴/۱۷	۴/۳۸	۴/۳۲
۵	Blackhawk	۰/۰۰۴	۰/۰۰۷۶	۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۸۷



شکل ۳- نفوذپذیری شبیه سازی شده به روش مونت کارلو در مقابل اندازه‌گیری شده (بر حسب میلی داری).

نتیجه گیری

در این تحقیق با استفاده از نتایج و اندازه‌گیری‌های مطالعات انجام شده، با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو، مقدار نفوذپذیری برای چند نمونه ماسه سنگ شبیه سازی گردید. روش بکار رفته جهت شبیه سازی نفوذپذیری محیط متخلخل فرکتالی بوده و با استفاده از تخلخل، بعد فرکتالی، اندازه بزرگترین قطر منفذ و تولید یک سری اعداد تصادفی بین ۰ و ۱ جهت شبیه سازی قطر

- Smidt, J.M., Monro, D.M., 1998. Fractal modeling applied to reservoir characterization and flow simulation. *Fractals*, 6, 401–408.
- Tyler, S.W., Wheatcraft, W., 1989. Application of fractal mathematics to soil water retention estimation. *Soil Sci. Soc. Am. Journal.*, 53, 987–996.
- Wheatcraft, S.W., Tyler, S.W., 1988. An explanation of scale-dependent dispersivity in heterogeneous aquifers using concepts of fractal geometry. *Water Resour. Res.* 24, 566–578.
- Xu, P., Yu, B.M., 2008. Developing a new form of permeability and Kozeny–Carman constant for homogeneous porous media by means of fractal geometry. *Adv. Water Resources*, 31, 74–81.
- Xu, P., Yu, M., Qio, S., Yu, B., 2012. Monte Carlo simulation of a two-phase flow in an unsaturated porous media. *Thermal Science*, 16, 1382–1385.
- Yu, B., 2008. Analysis of flow in fractal porous media. *Applied Mechanics Review*, DIO: 61, 050801-1.
- Yu, B., Zou, M., Feng, Y., 2005. Permeability of fractal porous media by Monte Carlo simulations, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 48, 2787–2794.
- Yu, B.M., Cheng, P., 2002. A fractal model for permeability of bi-dispersed porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 45, 2983–2993.
- Yu, B.M., Li, J.H., 2001. Some fractal characters of porous media. *Fractals*, 9, 365–372.
- Yu, B.M., Lee, L.J., Cao, H.Q., 2002. A fractal in-plane permeability model for fabrics. *Polym. Compos*, 23, 201–221.
- tunnels using size distribution of fragmented grains. *J. Pet. Sci. Eng.* 40, 159–176.
- Katz, A.J., Thompson, A.H., 1985. Fractal sandstone pores: implications for conductivity and pore formation. *Phys. Rev. Lett.* 54, 1325–1328.
- Katz, A.J., Thompson, A.H., 1986. Quantitative prediction of permeability in porous rocks. *Phys. Rev.* 34, 8179–8181.
- Kaviany, M., 1995. Principles of heat transfer in porous media, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 712 p.
- Krohn, C.E., Thompson, A.H., 1986. Fractal sandstone pores: Auto-mated measurements using scanning-electron-microscope images. *Phys. Rev.* 33, 6366–6374.
- Liu, Z.C., Yue, X.G., Hou, J.R., Zhang, L.J., 2004. A study of microscale flows in pores in low-permeability reservoirs. *The Second International Symposium on Multiphase, Non-Newtonian and Reacting Flows'04, September 10-12, 2004, Hangzhou, China*, p. 454–458.
- Mandelbrot, B.B., 1982. *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman, New York, 468 p.
- Perfect, E., Kay, B.D., 1991. Fractal theory applied to soil aggregation. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 55, 1552–1558.
- Perrier, E., Rieu, M., Sposito, G., de-Marsily, G., 1996. Models of the water retention curve for soils with a fractal pore size distribution. *Water Resour. Res.* 32, 3025–3031.
- Sahimi, M. 1995, *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock, From Classical Methods to Modern Approaches*. Weinheim etc., VCH 1995. XIV, 482 p.