

## The Analytical Model of Capture Zone of a Multi-well System in Bounded Aquifers

Somayeh Zarei-Doudeji<sup>1</sup>, Nozar Samani<sup>\*2</sup>

### Abstract

In this paper the capture zone equations of a well field in a bounded confined and unconfined aquifer are developed. The aquifer is rectangular-shaped in plan-view and bounded along all four sides. The boundaries are constant head (in-flow) or impervious (barrier) or a combination of both so that six boundary configurations are formed. Using the method of images the flow field in the bounded aquifer is first transformed to its equivalent in extensive aquifers and then the complex velocity potential theory is applied for the generation of stream function delineating the capture envelope. Our solution is flexible in terms of well number, well location, well type, injection/extraction rate, uniform regional flow direction and rate and number of boundaries. The derived equations are presented in form of capture type curves that may be used for the remediation of contaminated groundwater project design, containment of contaminant plumes and the evaluation of surface-subsurface water interaction.

**Keywords:** Complex velocity potential, Contaminated Groundwater remediation, Image wells, Surface-subsurface water interaction, Well capture envelope.

Received: 2015/10/15  
Accepted: 2016/02/27

## مدل تحلیلی زون گیرش سیستم چند چاهی در آبخوانهای محدود

سمیه زارعی دودجی<sup>۱</sup>، نوذر سامانی<sup>\*۲</sup>

### چکیده

در این مقاله معادلات زون گیرش سیستم چند چاهی در آبخوان های آزاد و محبوس محدود ارائه شده است. آبخوان در نمای سطحی مستطیل-شکل بوده که از هر چهار سمت توسط مرزهای هیدروژئولوژیکی محدود است. مرزهای احاطه کننده نفوذ ناپذیر، بار ثابت و یا ترکیبی از هر دو است. با ترکیب این مرزها آبخوانهایی با شش آرایش مرزی منحصر به فرد شکل می گیرد. با استفاده از روش چاههای مجازی آبخوان محدود مستطیل-شکل به آبخوان نامحدود معادل تبدیل شده و سپس با استفاده از تابع پتانسیل سرعت مختلط، معادلات زون گیرش در محیط جریان استخراج شده است. معادلات ارائه شده هیچ محدودیتی در تعداد چاهها، موقعیت و نوع آنها، نرخ برداشت یا تزریق، نرخ و جهت جریان منطقه ای ندارند. این معادلات به شکل منحنی های تیپ گیرش ارائه شده اند به نحوی که به عنوان ابزاری مفید در دست کاربران برای طراحی پروژه های پاکسازی آب زیر زمینی آلوده، مهار کردن هاله آلودگی و برآورد تبادل آب سطحی- زیرزمینی قابل استفاده هستند.

واژه های کلیدی: پاکسازی آب زیر زمینی آلوده، پتانسیل سرعت مختلط، تبادل آب سطحی-زیرزمینی، چاههای مجازی، محدوده گیرش.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۷/۲۳  
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۴/۱۲/۰۸

1- Department of Earth Sciences, Faculty of Sciences, Shiraz University.  
2- Department of Earth Sciences, Faculty of Sciences, Shiraz University.  
E-mail: samanin@shirazu.ac.ir

\*- Corresponding Author

۱- بخش علوم زمین، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز.  
۲- بخش علوم زمین، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز.  
\* نویسنده مسئول

بئر و لاهم (۱۹۹۶)، تغییرات شکل هندسی زون گیرش چاه با نفوذ ناقص در آبخوان محبوس را مورد مطالعه قرار دادند. شان (۱۹۹۹)، یک راه حل تحلیلی برای زون گیرش دو چاه با موقعیت اختیاری که در یک آبخوان محبوس با جریان منطقه ای یکنواخت قرار دارند را بدست آورد. ژان (۱۹۹۹)، زمان گیرش آب به درون یک چاه افقی مطالعه کرد. کریست و گولتز (۱۹۹۹)، یک مدل تحلیلی برای طراحی پروژه های پاکسازی آبهای زیرزمینی در محل ارائه کردند. کریست و گولتز (۲۰۰۲)، راه حل تحلیلی برای محاسبه منحنی های زون گیرش یک تا چهار چاه پمپاژ با موقعیت اختیاری که با نرخ های مختلفی پمپاژ می شوند را بدست آوردند. ارادمن (۲۰۰۰)، عرض زون گیرش و فاصله بین زون گیرش چند چاه پمپاژ محاسبه نمود. کریست و گولتز (۲۰۰۴)، روشی را برای مهار هیدرولیکی هاله آلودگی<sup>۷</sup> با ایجاد کمترین میزان افت در آبخوان با قرار دادن چاه های پمپاژ بموازات جریان آب منطقه ای پیشنهاد دادند. لئو و کیتانیدیس (۲۰۰۴)، زمان ماندگاری سیال در زون چرخش آب بین یک جفت چاه پمپاژ-تزریق محاسبه کردند. کنینگهام و همکاران (۲۰۰۴)، زون گیرش و چگونگی مبادله آب میان یک جفت چاه تزریق-پمپاژ توضیح دادند. فیینن و همکاران (۲۰۰۵)، از پتانسیل سرعت مختلط<sup>۸</sup> استفاده کردند و الگوریتمی برای تعیین زون گیرش برای جریان دو بعدی و پایدار در یک آبخوان همگن و انیزوتروپ ارائه نمودند. کمپانی زارع و همکاران (۲۰۰۵)، مدل تحلیلی زون گیرش یک چاه افقی در آبخوان محبوس پیشنهاد کردند. عطایی آشتیانی و همکاران (۲۰۱۲)، زون گیرش یک چاه ناقص با اثر پوسته ای در آبخوان محبوس مورد مطالعه قرار دادند. ژو و هایتما (۲۰۱۲)، یک حل تقریبی برای زون گیرش و زمان جریان شعاعی در آبخوان آزاد پیشنهاد دادند. دو اسمت (۲۰۱۴)، حل تحلیلی زون گیرش یک چاه واقع در روی خط مقسم آب ارائه نمود.

در بیشتر مقالات فوق پتانسیل سرعت برای توصیف زون گیرش چاه در آبخوان های نامحدود استفاده شده است. در مواردی همچون بررسی تبادل آب سطحی-زیرزمینی و محاسبه

زون گیرش<sup>۱</sup> به عنوان حجمی از آبخوان که آب ورودی به چاه را در یک دوره زمانی مشخص تأمین می کند تعریف می شود (تاد و میز، ۲۰۰۵). زون گیرش با گذشت زمان رشد کرده و زمانی که جریان به سمت چاه به حالت پایدار<sup>۲</sup> برسد به بزرگترین اندازه خود می رسد که ممکن است به عنوان محدوده گیرش (حوضه آبرگیر) چاه<sup>۳</sup> نامگذاری گردد. مطالعه زون گیرش چاهها در طرحی پروژه های پاکسازی آب زیر زمینی آلوده همانند روش پمپاژ-تصفیه<sup>۴</sup>، محصور کردن ابر آلوده، پاکسازی بیولوژیکی و اکسیداسیون شیمیایی، تبادل آب سطحی-زیر سطحی، طراحی حریم چاه<sup>۵</sup> و غیره مورد استفاده قرار می گیرد.

پس از مطالعه اولیه توسط ماسکت (۱۹۴۶)، مطالعات دیگری برای تعیین زون گیرش انجام شده است. جواندل و سنگ (۱۹۸۴)، یک سری معادلات و منحنی تیپ برای تعیین شکل زون گیرش یک یا تعداد بیشتری چاه در یک آبخوان محبوس با در نظر گرفتن جریان منطقه ای<sup>۶</sup> یکنواخت را بدست آوردند. برای سیستم تک چاهی، چاه در مرکز مختصات  $x$  و  $y$  قرار دارد و در سیستم چند چاهی، چاهها روی محور  $y$  قرار دارند. کینزلیاخ و همکاران (۱۹۹۲)، نحوه محاسبه حوضه آبرگیر چاه در دو بعد و سه بعد ارائه کردند. گراب (۱۹۹۳)، یک مدل تحلیلی برای برآورد زون گیرش چاه در آبخوان های محبوس و آزاد پیشنهاد کرد. فییشنکو و همکاران (۱۹۹۵)، معادله زون گیرش یک چاه ناقص در آبخوان آزاد را ارائه کردند. یانگ و همکاران (۱۹۹۵)، زون گیرش چاه در حالت جریان پایدار و ناپایدار مورد بررسی قرار دادند. باکر و استراک (۱۹۹۶)، زون گیرش چاه در جریان دو بعدی را مطالعه کردند. شافر (۱۹۹۶)، یک روش برای تعیین زون گیرش سه بعدی پایدار اطراف زهکش های افقی و چاههای عمودی در آبخوان هایی با میدان جریان منطقه ای یکنواخت ارائه نمودند.

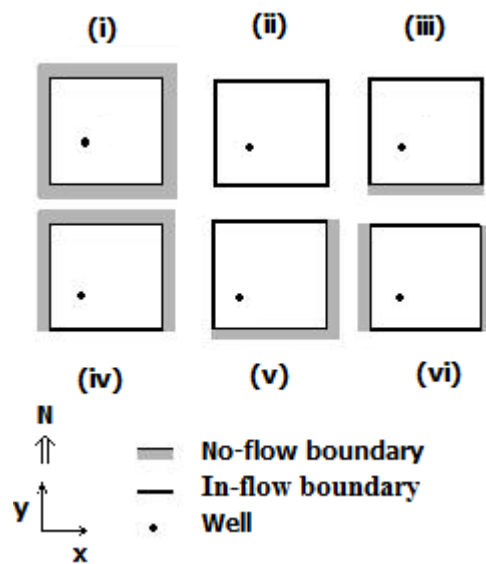
7- Contaminant plume containment  
8- Complex velocity potential

1- Capture zone  
2- Steady state  
3- Well capture envelope  
4- Pump-and-treat method  
5- Well head protection plan  
6- Regional flow

سرعت (استراک ۱۹۸۹، جواندل و همکاران ۱۹۸۴) بدست آمده است. نتایج به شکل منحنی های تیپ گیرش<sup>۲</sup> ارائه شده و چگونگی کاربرد آنها در محصور کردن هیدرولیکی هاله آلودگی، طراحی پروژه های پاکسازی و پمپاژ-تصفیه و تعیین ارتباط چاه و رودخانه مورد بحث قرار گرفته است.

#### مدل مفهومی

شکل ۱ نشان دهنده نمای سطحی از یک آبخوان آزاد یا محبوس است که توسط چهار مرز متقاطع عمود بر هم در جهت های شمال، جنوب، شرق و غرب محدود شده و توسط یک چاه با نفوذ کامل پمپاژ می شود. جریان آب زیرزمینی دو بعدی و تحت شرایط پایدار بوده و آبخوان همگن و همسانگرد (ایزوتروپ) با ضخامت یکنواخت است. محور  $x$  در امتداد مرز جنوبی و محور  $y$  در امتداد مرز شرقی است. مبدأ مختصات  $x-y$  در نقطه تلاقی مرزهای جنوبی و شرقی است.



شکل ۱- نمای تخت از ۶ حالت ممکن آبخوان مستطیل-شکل که توسط مرزهای نفوذ ناپذیر یا بار ثابت یا ترکیبی از هر دو تشکیل شده است. آبخوان ممکن است شامل هر تعداد چاه برداشت یا تغذیه باشد

در شکل ۱ چهار مرز ممکن است نفوذ ناپذیر<sup>۳</sup>، بار ثابت<sup>۴</sup> و یا ترکیبی از هر دو باشد. در نتیجه شش آرایش مرزی

نرخ برداشت چاه از رودخانه مجاور دانستن محدوده زون گیرش چاههایی که در نزدیکی رودخانه قرار دارند از اهمیت بسزایی برخوردار است. مورد دیگری که در رابطه با تبادل آب بین آبخوان-رودخانه از اهمیت بسزایی برخوردار است اجتناب از تبادل بین آب چاه و رودخانه آلوده در نزدیکی آن است. بعضی مواقع محصور کردن هاله آلودگی توسط موانع فیزیکی نفوذ ناپذیر و محصور کردن آلودگی در آن محدوده و پمپاژ آن توسط یک یا چند چاه مورد نیاز است. بنابراین در چنین مواردی، دانستن محدوده گیرش در آبخوان های محدود با اهمیت می شود.

این تارپراسانگ و ژان (۲۰۰۷)، معادله زون گیرش یک چاه بین دو رودخانه موازی را بدست آوردند. آنها اثر رودخانه ای که با آبخوان ارتباط هیدرولیکی کامل یا ناقص دارد را بررسی کردند. اسدی-آق بلاغی و همکاران (۲۰۱۱) معادله زون گیرش یک چاه پمپاژ نزدیک یک رودخانه را ارائه و دو نرخ بحرانی را تعیین کردند، که تبادل بین رودخانه-آبخوان-چاه را تعیین می کند. سامانی و زارعی دودجی (۲۰۱۲) معادلات زون گیرش سیستم چند چاهی در آبخوان گوه ای-شکل آزاد و محبوس، با و بدون در نظر گرفتن جریان یکنواخت منطقه ای را ارائه کردند. اسدی-آق بلاغی و همکاران (۲۰۱۳) راه حل قبلی خودشان را با در نظر گرفتن یک لایه نشستی بین رودخانه و آبخوان و برآورد نسبت آب پمپاژ شده از رودخانه و آبخوان گسترش دادند. زارعی دودجی و سامانی (۲۰۱۴) یک مدل تحلیلی برای زون گیرش سیستم چند چاهی در آبخوان های آزاد و محبوس شبه جزیره ای-شکل ارائه کردند و کاربرد های مهندسی آنرا نشان دادند.

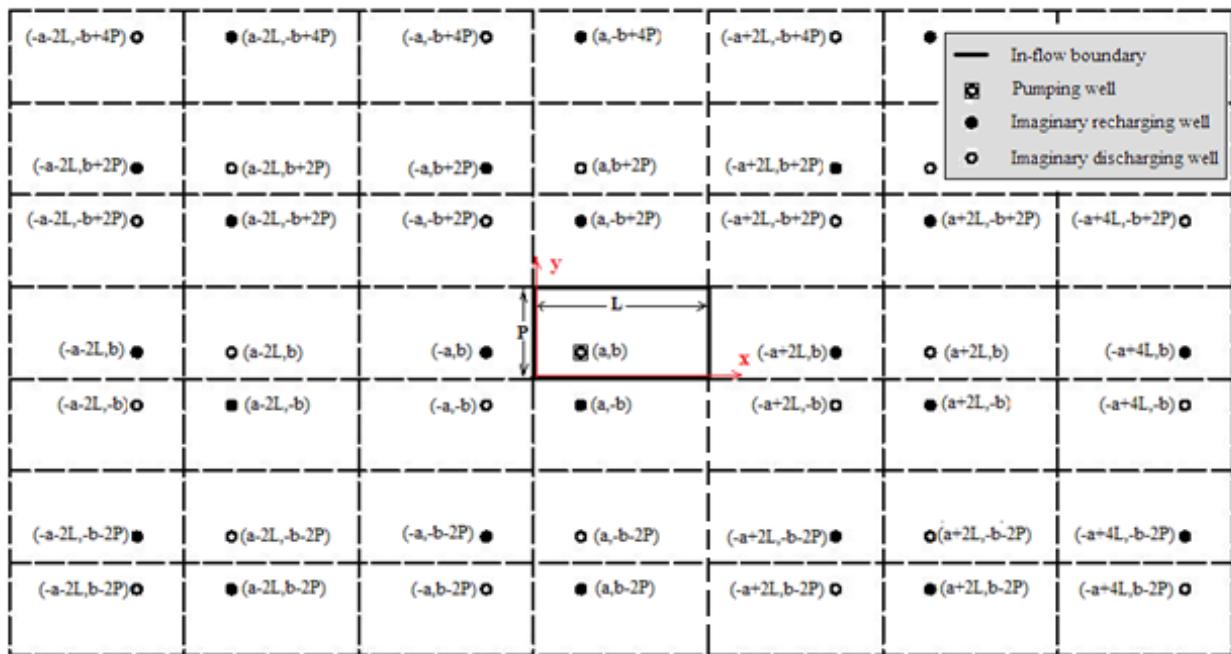
معادلات تحلیلی افت یک چاه در آبخوانهای محدود مستطیل شکل برای جریان پایدار توسط لو و همکاران (۲۰۱۵) پیشنهاد شده است، اما تا کنون معادلات زون گیرش چاه در آبخوان هایی که در تمامی جهات محدود شده اند ارائه نشده است، در این مقاله مدل تحلیلی زون گیرش سیستم چند چاهی در آبخوان های آزاد و محبوس مستطیل-شکل با آرایش های مرزی متنوع با و بدون جریان یکنواخت منطقه ای ارائه می شود. معادله منحنی گیرش با استفاده از روش چاههای مجازی<sup>۱</sup> (فریس و همکاران ۱۹۶۲، چان ۱۹۷۶) و تابع پتانسیل

2- Capture type curves  
3- Impervious  
4- Constant head

1- Image well method

پمپاژ یا تغذیه و با هر نرخ باشد. با استفاده از روش چاههای مجازی (فریس و همکاران ۱۹۶۲)، آبخوان محدود قابل تبدیل به آبخوان با گسترش نامحدود است، که در شکل ۲ برای آرایش مرزی نوع (ii) نشان داده شده است. شکل ۲ همچنین نشان دهنده نوع و موقعیت چاههای مجازی (پمپاژ یا تغذیه) است. در شکل ۲ یک چاه نشان داده شده است اما معادلات پیشنهادی برای هر تعداد چاه پمپاژ یا تغذیه یا ترکیبی از هر دو با نرخ برداشت یا تغذیه یکسان یا متفاوت و با هر نرخ و جهت جریان منطقه ای یکنواخت قابل تعمیم است. قابل ذکر است که جهت جریان منطقه ای یکنواخت بایستی با خصوصیات هیدرولیکی هر مرز هماهنگ باشد (به این معنی که جریان منطقه ای یکنواخت همیشه موازی مرز نفوذ ناپذیر است).

منحصر به فرد که در شکل ۱ نمایش داده شده است تشکیل می شود (همچنین رجوع کنید به چان ۱۹۷۶) و چان و همکاران (۱۹۷۶)). در شکل 1(i) هر چهار مرز نفوذ ناپذیر هستند و در شکل 1(ii) هر چهار مرز رودخانه با گرادیان صفر است که کاملاً در آبخوان نفوذ کرده و ارتباط هیدرولیکی کامل با آبخوان دارد. در شکل 1(iii) مرز جنوبی در امتداد محور x نفوذ ناپذیر است و مرزهای شمالی، شرقی و غربی رودخانه با بار ثابت هستند. در شکل 1(iv) مرز جنوبی با ثابت و سایر مرزها نفوذ ناپذیر هستند. در شکل 1(v) آبخوان در جهت های شرقی و جنوبی توسط مرزهای نفوذ ناپذیر محدود شده و مرزهای شمالی و غربی با ثابت هستند و در شکل 1(vi) مرزهای شرقی و غربی نفوذ ناپذیر و مرزهای شمالی و جنوبی با ثابت هستند. چاه می تواند در هر موقعیت اختیاری (x0, y0) قرار گیرد و چاه



شکل ۲- نمای تخت از سیستم چاههای مجازی برای آبخوان مستطیل - شکل، نشان داده شده در شکل (ii).  
این شکل از هر چهار طرف تا بینهایت گسترش دارد

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad [1]$$

که در آن  $\Phi = Kh$  پتانسیل سرعت  $[L^2T^{-1}]$  و  $K$  و  $h$  به ترتیب هدایت هیدرولیکی  $[LT^{-1}]$ ، و بارهیدرولیکی  $[L]$

### مدل ریاضی

در مدل مفهومی ارائه شده در بالا، جریان یکنواخت پایدار در یک آبخوان همگن و همسانگرد محبوس که معادله لاپلاس در آن بصورت زیر صدق می کند در نظر می گیریم:

برای شش آرایش مرزی مشخص شده در شکل ۱ معادلات زیر بدست می آید:

$$W(z) = -qze^{-i\alpha} + \sum_{k=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m_k c_k \{J_1 J_2 [\ln(z - z_{01k})] + J_3 J_4 [\ln(z - z_{02k})] + J_5 J_6 [\ln(z - z_{03k})] + J_7 J_8 [\ln(z - z_{04k})]\} \quad [6]$$

که در آن:

$$\begin{aligned} z_{01k} &= (a_k + 2nL) + i(2mp - b_k) \\ z_{02k} &= (-a_k + 2nL) + i(2mp - b_k) \\ z_{03k} &= (a_k + 2nL) + i(2mp + b_k) \\ z_{04k} &= (-a_k + 2nL) + i(2mp + b_k) \end{aligned} \quad [7]$$

بر اساس آرایش مرزی (شکل ۱)، پارامترهای  $J_1$  تا  $J_8$  مقادیر داده شده در جدول ۱ را بخود می گیرد.  $n$  و  $m$  شاخص جمع،  $a$ ،  $b$ ،  $L$  و  $p$  فواصلی هستند که در شکل ۲ نشان داده شده اند.

با استفاده از عبارات بدون بعد زیر:

$$\begin{aligned} a_D &= \frac{a}{L}, \quad b_D = \frac{b}{L}, \quad z_D = \frac{z}{L}, \quad z_{0Dk} = \frac{z_{0k}}{L} \\ p_D &= \frac{p}{L}, \quad x_D = \frac{x}{L}, \quad y_D = \frac{y}{L}, \quad Q_{Dk} = \frac{Q_k}{2\pi BLK} \\ W_D(z) &= \frac{W(z)}{KL}, \quad \Phi_D = \frac{\Phi}{KL}, \quad \Psi_D = \frac{\Psi}{KL} \end{aligned} \quad [8]$$

معادلات ۶ و ۷ بدون بعد می شوند.

$$W_D(z) = -z_D e^{-i\alpha} + \sum_{k=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q_{Dk} c_k \{J_1 J_2 [\ln(z_D - z_{01Dk})] + J_3 J_4 [\ln(z_D - z_{02Dk})] + J_5 J_6 [\ln(z_D - z_{03Dk})] + J_7 J_8 [\ln(z_D - z_{04Dk})]\} \quad [9]$$

$$\begin{aligned} z_{01Dk} &= (a_{Dk} + 2n) + i(2mp_D - 2b_{Dk}) \\ z_{02Dk} &= (-a_{Dk} + 2n) + i(2mp_D - 2b_{Dk}) \\ z_{03Dk} &= (a_{Dk} + 2n) + i(2mp_D + 2b_{Dk}) \\ z_{04Dk} &= (-a_{Dk} + 2n) + i(2mp_D + 2b_{Dk}) \end{aligned} \quad [10]$$

هستند. پتانسیل سرعت  $\Phi$  و تابع جریان  $\Psi$  توابع هارمونیک هستند و در معادله لاپلاس بالا صدق می کنند. در نتیجه تابع جریان در سیستم جریان پایدار با یک پتانسیل سرعت شناخته شده به سادگی با بکار بردن معادله کاجی-ریمن<sup>۱</sup>، (جواندل و همکاران ۱۹۸۴) بصورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad [2]$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad [3]$$

$m$  تابع پتانسیل سرعت برای یک چاه (تزریق یا برداشت) با توان  $m$  که در نقطه  $z_0$  قرار گرفته است به صورت زیر محاسبه می گردد. (جواندل و همکاران ۱۹۸۴):

$$W(z) = -qze^{-i\alpha} + m \ln(z - z_0) \quad [4]$$

که در آن عبارت اول سمت راست نشان دهنده جریان یکنواخت منطقه ای و عبارت دوم نشانگر چاه است.  $z = x + iy$  و  $z_0 = x_0 + iy_0$  اعداد مختلط هستند.

$i = \sqrt{-1}$  علامت مختلط است،  $z$  یک موقعیت اختیاری در صفحه مختلط است که بخش های حقیقی<sup>۲</sup> و موهومی<sup>۳</sup> آن  $x$  و  $y$  می باشند.  $m = Q/2\pi B$ ،  $Q$  نرخ برداشت (+) یا تزریق (-) (L3T-1)،  $B$  ضخامت آبخوان ( $L$ )،  $q$  سرعت داری جریان یکنواخت منطقه ای (LT-1) و  $\alpha$  زاویه بین جهت جریان یکنواخت و جهت مثبت محور  $x$  است. به دلیل خطی بودن معادله لاپلاس، اصل انطباق<sup>۴</sup> برای محاسبه پتانسیل سرعت برای یک سیستم چند چاهی بدون بعد در یک میدان جریان منطقه ای به صورت زیر قابل استفاده است (جواندل و همکاران ۱۹۸۴ و بییر ۱۹۷۹).

$$W(z) = -qze^{-i\alpha} + \sum_{k=1}^N m_k c_k \ln(z - z_{0k}) \quad [5]$$

که در آن  $N$  تعداد چاهها،  $k$  شاخص جمع،  $z_{0k}$  موقعیت فضایی  $k$ امین چاه تزریق یا تخلیه و  $c_k$  علامت (+) یا (-) به ترتیب برای چاه برداشت و تزریق است. با بازنویسی معادله ۵

1- Cauchy-Riemann  
2- Real part  
3- Imaginary part  
4- Superposition

جدول ۱- مقادیر پارامترهای  $J_1$  تا  $J_8$  برای ۸ آرایش مرزی. آرایش های مرزی نوع vii و viii به ترتیب تصویر آینه ای آرایش های مرزی نوع v و vi هستند

نوع شرایط مرزی	مرز				پارامتر							
	شرق	غرب	جنوب	شمال	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$J_6$	$J_7$	$J_8$
i	ناپذیر نفوذ	ناپذیر نفوذ	ناپذیر نفوذ	ناپذیر نفوذ	1	1	1	1	1	1	1	1
ii	بار ثابت	بار ثابت	بار ثابت	بار ثابت	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1
iii	بار ثابت	بار ثابت	ناپذیر نفوذ	بار ثابت	$(-1)^m$	1	$(-1)^m$	-1	$(-1)^m$	1	$(-1)^m$	-1
iv	ناپذیر نفوذ	ناپذیر نفوذ	بار ثابت	ناپذیر نفوذ	$(-1)^{m+1}$	1	$(-1)^{m+1}$	1	$(-1)^m$	1	$(-1)^m$	1
v	بار ثابت	ناپذیر نفوذ	ناپذیر نفوذ	بار ثابت	$(-1)^m$	$(-1)^n$	$(-1)^m$	$(-1)^{n+1}$	$(-1)^m$	$(-1)^n$	$(-1)^m$	$(-1)^{n+1}$
vi	ناپذیر نفوذ	ناپذیر نفوذ	بار ثابت	بار ثابت	-1	1	-1	1	1	1	1	1

در آبخوان های آزاد ضخامت اشباع تغییر می کند و پتانسیل به صورت  $\Phi = \frac{1}{2}Kh^2$  تعریف می شود، که در آن  $K$  هدایت هیدرولیکی  $[LT^{-1}]$  و  $h$  بار آبی است  $[L]$  (ببیر ۱۹۷۹ و استراک ۱۹۸۹). با این تعریف معادلات ۹ تا ۱۳ برای آبخوان آزاد با جایگزینی عبارت  $KB$  با دبی در واحد عرض  $[L^2T^{-1}]$   $q_a$  <sup>۱</sup>، بازنویسی می شود (استراک ۱۹۸۹، انتارپراسانگ و ژان ۲۰۰۷). همچنین برخی از عبارات بدون بعد در معادله ۹ بشکل زیر در می آیند:

$$Q_{Dk} = \frac{Q_k}{2\pi Bq_a}, \quad W_D(z) = \frac{W(z)}{q_a} \quad [14]$$

$$\Phi_D = \frac{\Phi}{q_a}, \quad \Psi_D = \frac{\Psi}{q_a}$$

معادله ۴ نیز با  $W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) - q_a z e^{-i\alpha}$  جایگزین می شود.

با ترسیم معادلات ۱۱ و ۱۲ در صفحه  $x-y$  شبکه جریان بدست می آید که در آن  $\Phi_D$  و  $\Psi_D$  به ترتیب خطوط پتانسیل و خطوط جریان را نشان می دهند. خطوط جریانی که به سمت چاه همگرا می شوند زون گیرش را شکل می دهند. حل معادلات و ترسیم شبکه های جریان توسط نرم افزار MATLAB انجام شده است.

### تجزیه و تحلیل منحنی های زون گیرش

همانطور که اشاره شد با ترسیم معادلات ۱۱ و ۱۲ در

که در آن  $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$  است. بخش حقیقی  $\Phi_D$  و مجازی  $\Psi_D$  معادله ۹ بصورت زیر قابل تفکیک است:

$$\Phi_D = -(x_D \cos(\alpha) + y_D \sin(\alpha)) + \sum_{k=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{Q_{Dk}}{2} \{J_1 J_2 \ln[f_{1Dk}^2 + f_{2Dk}^2] + J_3 J_4 \ln[f_{3Dk}^2 + f_{2Dk}^2] + J_5 J_6 \ln[f_{1Dk}^2 + f_{4Dk}^2] + J_7 J_8 \ln[f_{3Dk}^2 + f_{4Dk}^2]\} \quad [11]$$

$$\Psi_D = -(y_D \cos(\alpha) - x_D \sin(\alpha)) + \sum_{k=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_k Q_{Dk} \{J_1 J_2 \tan^{-1}[\frac{f_{2Dk}}{f_{1Dk}}] + J_3 J_4 \tan^{-1}[\frac{f_{2Dk}}{f_{3Dk}}] + J_5 J_6 \tan^{-1}[\frac{f_{4Dk}}{f_{1Dk}}] + J_7 J_8 \tan^{-1}[\frac{f_{4Dk}}{f_{3Dk}}]\} \quad [12]$$

که در آن

$$\begin{aligned} f_{1Dk} &= x_D - (a_{Dk} + 2n) \\ f_{2Dk} &= y_D - (2mp_D - b_{Dk}) \\ f_{3Dk} &= x_D - (-a_{Dk} + 2n) \\ f_{4Dk} &= y_D - (2mp_D + b_{Dk}) \end{aligned} \quad [13]$$

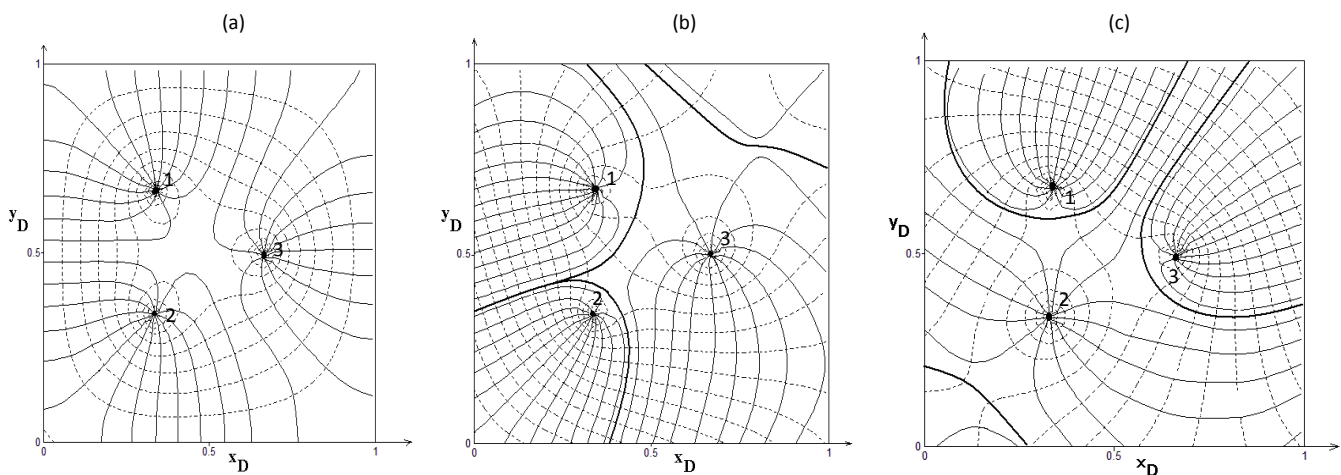
برای آبخوانی بدون جریان منطقه ای یکنواخت بخش اول سمت راست معادلات ۹، ۱۱ و ۱۲ حذف می گردد.

و تجزیه و تحلیل منحنی های گیرش برای چند مورد کاربردی تر بسنده می کنیم.

### تبادل آب در سیستم چاه-آبخوان-رودخانه

برای بررسی تبادل آب بین چاه، آبخوان و آب سطحی (رودخانه، دریا) شکل ۳ برای سه چاه پمپاژ در یک آبخوان با آرایش مرزی نوع (ii) از شکل ۱ با حل معادلات (۱۱-۱۲) تهیه و ترسیم شده است. آبخوان در شکل 3a فاقد جریان یکنواخت منطقه ای است به این معنی که سطح پیزومتری اولیه افقی است.

صفحه مختصات x-y شبکه جریان ترسیم می گردد که در آن  $\Psi_D$  و  $\Phi_D$  به ترتیب خطوط پتانسیل و خطوط جریان را نشان می دهند. زون گیرش محدوده ای است که خطوط جریان آن به سمت چاه همگرا می شود. به دلیل تعداد زیاد متغیرها (شش آرایش مرزی، موقعیت چاه، نرخ و جهت جریان منطقه ای یکنواخت، تعداد و نوع چاهها، نرخ پمپاژ یا تزریق و آرایش مرزی آبخوان) که روی میدان جریان اثر می گذارد تعداد زیادی شبکه جریان قابل ترسیم است. در اینجا به تولید،



شکل ۳- منحنی های گیرش سه چاه در آبخوان محبوس با آرایش مرزی نشان داده شده در شکل 1(ii):

$$[Q_{D1}=Q_{D2}=Q_{D3}=+0.00198 \text{ (15 lit/sec)}, a_{D1}=a_{D2}=0.333, a_{D3}=0.666, b_{D1}=0.333, b_{D2}=0.666, b_{D3}=0.5]$$

(a) بدون جریان منطقه ای، (b) با جریان منطقه ای  $\alpha = 45^\circ$  و (c) با جریان منطقه ای  $\alpha = 225^\circ$

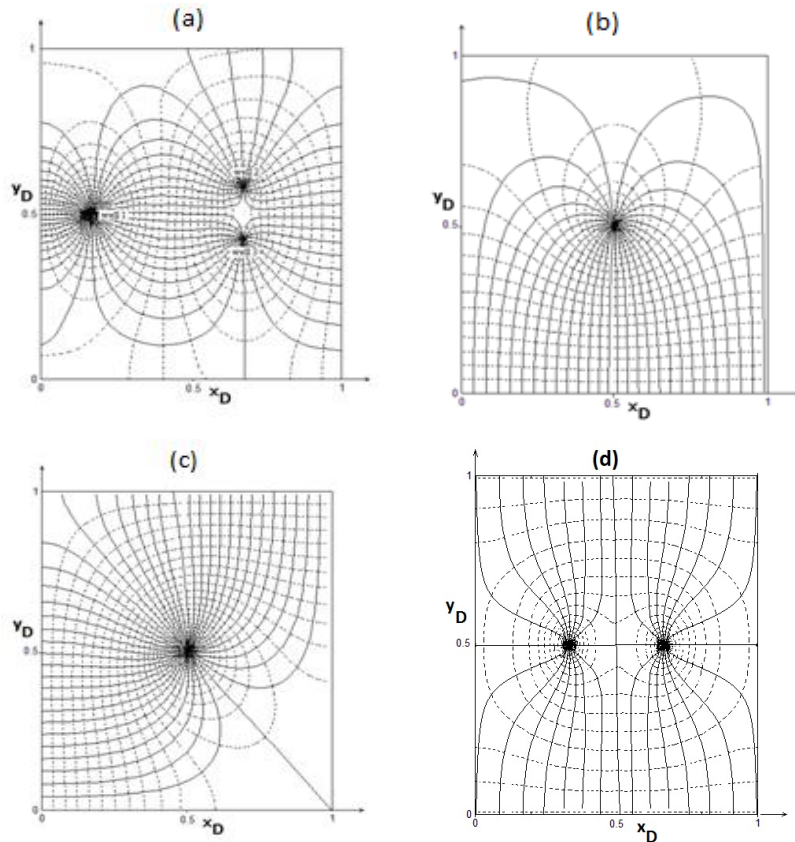
همچنین بررسی حبابه هر چاه و یا ارتباط بین چاه و مرز مورد استفاده قرار گیرد.

به عنوان مثالی دیگر شکل ۴ برای چهار آبخوان مستطیل شکل با آرایش های مرزی متفاوت در حالی که جریان منطقه ای وجود ندارد ترسیم شده است. به عبارت دیگر، عبارت اول از بخش سمت راست معادلات ۱۱ و ۱۲ حذف شده است. شکل 4a برای سه چاه در آبخوانی با آرایش مرزی نوع (iii) ترسیم شده است. چاه شماره ۱ چاه تزریق بوده و دو چاه دیگر از نوع پمپاژ می باشند. این شکل نشان می دهد که چاه تزریق، چاههای پمپاژ و همچنین مرز شرقی را تغذیه می کند. چاههای پمپاژ همچنین بخشی از آب برداشتی خود را از رودخانه های شمالی و غربی بدست می آورند. شکل 4b نشان دهنده شبکه جریان یک چاه در آبخوان نوع (iv) است و

جریان منطقه ای در شکل 3b از سمت جنوب شرق به شمال غرب است ( $\alpha = 45^\circ$ ) و در شکل 3c از سمت شمال شرق به جنوب غرب است ( $\alpha = 225^\circ$ ). همانطور که مشاهده می شود جریان منطقه ای یک عامل کنترل کننده برای تبادل آب سطحی-زیرزمینی است زیرا الگوی منحنی های گیرش به شدت در این سه شکل با یکدیگر متفاوت است. به عنوان مثال در شکل 3b چاه شماره ۱ آب برداشتی خود را از مرزهای شمالی و غربی بدست می آورد، اما در شکل 3c این چاه فقط از مرزهای شرقی و جنوبی تغذیه می شود و در شکل 3c توسط هر چهار مرز شرقی و جنوبی تغذیه می شود. شکل ۳ نشان می دهد در شرایط واقعی برای توسعه پایدار منابع آب زیر زمینی در یک منطقه معادلات پیشنهاد شده ممکن است برای طراحی حریم چاه

هستند. شکل 4d محدوده گیرش دو چاه پمپاژ در آبخوان نوع (vi) را نشان میدهد. چاهها ارتباط مشخصی با رودخانه های شمالی و جنوبی دارند و یک مرز تقسیم آب در بین دو چاه از شمال تا جنوب شکل گرفته است.

نشان می دهد که رودخانه تغذیه کننده چاه است. شکل 4c برای یک چاه در آبخوان با آرایش مرزی نوع (v) ترسیم شده و نشان می دهد که مطابق انتظار منحنی های خطوط پتانسیل و خطوط جریان به ترتیب عمود و موازی با مرز نفوذ ناپذیر



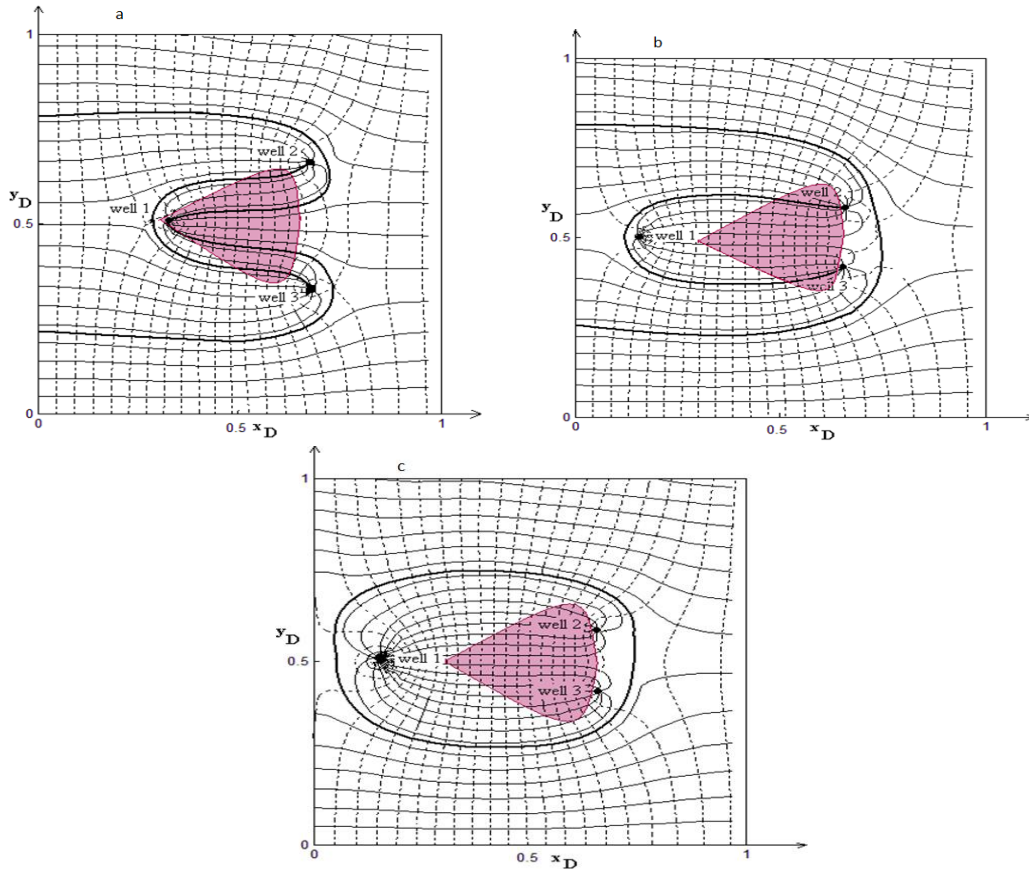
شکل ۴- منحنی های پتانسیل سرعت و تابع جریان بدون در نظر گرفتن جریان یکنواخت. (a) نوع (iii) با سه چاه، (b) آبخوان نوع (iv) با یک چاه، (c) آبخوان نوع (v) با یک چاه و (d) آبخوان نوع (vi) با دو چاه

هدف اصلی محصور کردن هیدرولیکی هاله آلودگی توسط سه چاه و تعیین موقعیت و نرخ بهینه آنها است. اولین گزینه منطقی قرار دادن یک چاه تزریق در نزدیکی منشأ آلودگی و دو چاه پمپاژ روی پیشانی هاله آلودگی است. بنابراین در مرحله اول بصورت آزمایشی ما سه چاه ۱ تا ۳ را در موقعیت های (0.333, 0.5)، (0.666, 0.666) و (0.666, 0.333) با نرخ های به ترتیب ۵، -۵ و ۵ لیتر بر ثانیه قرار دادیم. با استفاده از معادلات ۹ تا ۱۳، منحنی های گیرش همانطور که در شکل 5a نشان داده شده است ترسیم گردید. همانطور که در این شکل مشاهده می گردد بخشی از آبی که از طریق چاه ۱ به آبخوان

#### محصور کردن و پاک سازی هاله آلودگی

به منظور محصور کردن هاله آلودگی یا طراحی هر پروژه پاک سازی آب زیرزمینی در محل برای تصفیه آب آلوده، بهینه ترین تعداد چاه، بهینه ترین نرخ برداشت یا تغذیه و موقعیت چاهها نسبت به هاله آلودگی مهمترین عناصر در یک طراحی کارا و مقرون به صرفه است. فرض کنید در یک آبخوان محبوس با آرایش مرزی نوع (iii) از شکل ۱، یک هاله آلودگی در جهت جریان منطقه ای یکنواخت آب زیر زمینی (از شرق به غرب) همانگونه که در شکل ۵ با رنگ قرمز نشان داده شده، شکل گرفته است.





شکل ۵ - محصور کردن هاله آلودگی به کمک زون گیرش چاه:

a) گزینه اول ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $Q_{D1} = -0.00066$ ,  $Q_{D2} = Q_{D3} = +0.00066$ ,  $a_{D1a} = 0.333$ ,  $a_{D2a} = 0.666$ ,  $a_{D3a} = 0.666$ ,  $b_{D1a} = 0.5$ ,  $b_{D2a} = 0.666$ ,  $b_{D3a} = 0.333$ ),

b) گزینه دوم ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $Q_{D1} = -0.00066$ ,  $Q_{D2} = Q_{D3} = +0.00066$ ,  $a_{D1b} = 0.166$ ,  $a_{D2b} = 0.666$ ,  $a_{D3b} = 0.666$ ,  $b_{D1b} = 0.5$ ,  $b_{D2b} = 0.583$ ,  $b_{D3b} = 0.416$ ),

c) گزینه سوم ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $Q_{D1} = -0.00132$ ,  $Q_{D2} = Q_{D3} = +0.00066$ ,  $a_{D1c} = 0.166$ ,  $a_{D2c} = a_{D3c} = 0.666$ ,  $b_{D1c} = 0.5$ ,  $b_{D2c} = 0.583$ ,  $b_{D3c} = 0.416$ )

ندارند. در مرحله سوم بصورت آزمایشی، ما نرخ تزریق چاه شماره ۱ را به ۱۰ لیتر بر ثانیه ( $Q_D = -0.00132$ ) تغییر دادیم و سایر پارامترها مشابه گزینه دوم هستند. همانطور که در شکل 5c مشاهده می کنید، یک حلقه چرخشی آب شکل گرفته و ما به بهینه ترین طراحی دست یافته ایم، به این معنی که هاله آلودگی محصور شده و بدون پخش شدن در آبخوان در جهت جریان توسط چاههای پمپاژ تخلیه می گردد. فرایند فوق با استفاده از روشهای بهینه سازی خودکار نظیر الگوریتم ژنتیک و یا انیلینگ نیز امکان پذیر است.

روش دیگر برای طراحی پروژه بالا، در ابتدا یک سری

منحنی تیپ برای چندین آرایش چاه با استفاده از معادلات ۱۱

تزریق می گردد توسط دو چاه پمپاژ پایین دست برداشت نشده و به سمت مرز شرقی فرار می کند. بنابراین این سه چاه برای هدف مورد نظر ما در موقعیت درستی از آبخوان قرار نگرفته اند. در گزینه دوم بصورت آزمایشی موقعیت چاههای شماره ۱ تا ۳ را به ترتیب به این صورت تغییر داده شده است:  $(0.166, 0.5)$ ،  $(0.666, 0.583)$  و  $(0.666, 0.333)$ . با این آرایش چاهها و با نرخی مشابه مرحله اول، هیچ آبی از بین دو چاه پمپاژ پایین دست (چاههای شماره ۲ و ۳) فرار نکرده و هاله آلودگی محصور می شود اما این چاهها بخشی از آب برداشتی خود را از مرز غربی بدست می آورند (شکل 5b). بنابراین نرخ های برداشت یا تزریق چاهها تناسبی با بهترین کارایی سیستم

- Journal*, 58(8), 1813-1823, DOI: 10.1080/02626667.2013.840725.
- Asadi-Aghbolaghi, M., Rakhshandehroo, GR., Kompani-Zare, M., 2011. Analytical solutions for the capture zone of a pumping well near a stream. *Hydrogeology J.*; DOI :10.1007/s10040-011-0741-2.
- Ataie-Ashtiani, B., Shafei, B., Rashidian-Dezfouli, H., 2012. Mohamadzadeh M. Capture zone of a partially penetrating well with skin effects in confined aquifers. *Transp. Porous Med.* 91(2), 437-457.
- Bair, ES., Lahm TD., 1996. Variation in capture zone geometry of a partially penetrating pumping well in an unconfined aquifer. *Ground Water*, 34(5), 842-852.
- Bakker, M., Strack, ODL., 1996. Capture zone delineation in two-dimensional groundwater flow models. *Water Res. Res.*, 32(5), 1309-1315 .
- Bear, J., 1972. *Dynamics of Fluids in Porous Media.* Elsevier, NewYork, USA .
- Bear, J., 1979. *Hydraulics of Ground Water.* McGraw-Hill, New York, USA .
- Chan, YK., 1976. Improved image-well technique for aquifer analysis. *J. Hydrol.*, 29, 149-164.
- Chan., YK, Mullineux, N., Reed, JR., 1976. Analytical solutions for drawdowns in rectangular artesian aquifers. *J. Hydrol.*, 31, 151-160.
- Christ, JA., Goltz, MN., 1999. Development and application of an analytical model to aid design and implementation of in situ remediation technologies. *J. Contaminant Hydrol.*, 37, 295-317 .
- Christ, JA., Goltz, MN., 2002. Hydraulic containment: analytical and semi-analytical models for capture zone curve delineation. *J. Hydrol.*, 262, 224-244.
- Christ, JA., Goltz, MN., 2004. Containment of groundwater contamination plumes: minimizing drawdown by aligning capture wells parallel to regional flow. *J. Hydrol.*, 286, 52-68 .
- Cunningham, JA., Hoelen, TP., Hopkins, GD., Lebro'n, CA., Reinhard M., 2004. Hydraulics of recirculating well pairs for ground water remediation. *Ground Water*, 42(6):880-889.
- De Smedt, F., 2014. Analytical solution for capture and catchment zones of a well located on a groundwater divide. *Water Resour. Res.* 50: 481-490, doi:10.1002/2013WR014763.
- Eradmann, JB., 2000. On capture width and capture zone gaps in multiple-well systems. *Ground Water*, 38(4), 497-504
- Faybishenko, B., Javandel, I., Witherspoon, PA., 1995. *Hydrodynamics of the capture zone of a partially*

و ۱۲ تهیه و سپس نقشه هاله آلودگی (که با مقیاسی مشابه منحنی های تیپ ترسیم گردیده است) را روی آنها منطبق می شود. منحنی گیرشی که هاله آلودگی را بصورت کامل احاطه کند بهینه ترین نرخ پمپاژ یا تزریق و مناسب ترین آرایش چاه را خواهد داشت.

روشی که در بالا ارائه شد در شرایط واقعی برای هر آبخوان محدود که ممکن است یکی از شش آرایش مرزی نشان داده شده در شکل ۱ را دارا باشد قابل استفاده است. اگرچه در بخش بالایی کاربرد منحنی های گیرش بدست آمده برای پاکسازی آب زیرزمینی و محصور کردن هاله آلودگی نشان داده شده است، کاربرد آنها در بررسی تبادل آب سطحی-زیر سطحی به راحتی قابل مشاهده است.

### نتیجه گیری

در این تحقیق معادلات زون گیرش برای یک میدان چاه شامل هر تعداد چاه تغذیه یا پمپاژ یا ترکیبی از هر دو در آبخوان های آزاد یا محبوس مستطیل-شکل محدود با و یا بدون جریان منطقه ای یکنواخت با استفاده از نظریه پتانسیل سرعت مختلط و روش چاههای مجازی ارائه شده است. معادلات برای شش آرایش مرزی منحصر به فرد بدست آمده اند. معادلات بدست آمده قابل کاربرد در پروژه های پاکسازی آب زیرزمینی، محصور کردن هاله آلودگی، تأیید مدل های عددی و برآورد تبادل آب سطحی-زیرزمینی هستند. معادلات به شکل منحنی های تیپ گیرش ارائه شده اند. با استفاده از منحنی های تیپ گیرش و همچنین با استفاده از روش انطباق منحنی ها کاراترین و مقرون به صرفه ترین گزینه برای پروژه های فوق قابل طراحی است. در چنین حالتی نرخ تزریق یا پمپاژ، تعداد چاهها و فاصله بین چاهها در هر آبخوان مستطیل-شکلی قابل طراحی است. معادلات پیشنهادی هیچ محدودیتی از نظر تعداد چاه، موقعیت چاه، نوع چاه، نرخ پمپاژ یا تزریق، نرخ و جهت جریان منطقه ای، تعداد مرزها و کاربرد ندارد.

### منابع

- Asadi-Aghbolaghi, M., Rakhshandehroo GR., Kompani-Zare, M., 2013. An analytical approach to capture zone delineation for a well near a stream with a leaky layer. *Hydrological Sciences*

- Muskat, M., 1946. *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*. J.W. Edwards, Ann Arbor, USA. 306 T.
- Samani, N., Zarei-Doudeji, S., 2012. Capture zone of a multi-well system in confined and unconfined wedge-shaped aquifers. *Adv Water Resour*, 39: 71-84.
- Schafer, DC., 1996. Determining 3D capture zones in homogeneous, anisotropic aquifers. *Ground Water*, 34(4):628-639.
- Shan, C., 1999. An analytical solution for the capture zone of two arbitrarily located wells. *J. Hydrol.* 222(1-4):123-128.
- Strack, O.T.D., 1989. *Groundwater mechanics*. Prentice-Hall, NJ.
- Todd, DK., and Mays, MM., 2005. *Groundwater Hydrology*. 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc, New York.
- Yang, YJ., Spencer, RD., Todd, MG., 1995. Analytical solutions for determination of non-steady-state and steady-state capture zones. *Ground Water Monit. Remediat.* 15(1), 101-106.
- Zarei-Doudeji, S. (2014). *Capture Zone of a Multiwell System in Bounded Aquifers*. PhD Thesis, Shiraz University.
- Zarei-Doudeji, S., Samani, N., 2014. Capture zone of a multi-well system in bounded peninsula-shaped aquifers. *J. Contam. Hydrol.* 164: 114-124
- Zhan, H., 1999. Analytical study of capture time to a horizontal well. *J. Hydrol.* 217: 46-54
- Zhou, Y., Haitjema, H., 2012. Approximate solutions for radial travel time and capture zone in unconfined aquifers. *Ground Water*, 50(5): 799-803.
- penetrating pumping well in an unconfined aquifer. *Water Resour. Res.* 31, 859-866.
- Ferris, JG., Knowles, DB., Brown, RH., Stallman, RW., 1962. *Theory of aquifer tests*. US Geol. Survey, Water-Supply Paper 1536-E.
- Fienen, MN., Lou, J., Kitanidis, PK., 2005. Semi-analytical homogeneous anisotropic capture. *J. Hydrol.* 312:39-50.
- Grubb, S., 1993. Analytical models for estimation of steady-state capture zones of pumping wells in confined and unconfined aquifers. *Ground Water*, 31(1), 27-32.
- Intaraprasong, T., Zhan, H., 2007. Capture zone between two streams. *J. Hydrol.* 338:297-307
- Javandel, I., Doughty, C., Tsang, CF., 1984. *Groundwater Transport: Handbook of Mathematical Models*. Water Resources Monograph 10. American Geophysical Union. Washington DC.
- Javandel, I., Tsang, CF., 1986. Capture zone type curves: a tool for aquifer cleanup. *Ground Water*, 24(5):616-625.
- Kinzelbach, W., Marburger, M., Chiang, WH., 1992. Computation of catchment areas in two and three spatial dimensions. *J. Hydrol.* 134: 221-246.
- Kompani-Zare, M., Zhan, H., Samani, N., 2005. Analytical study of capture zone to a horizontal well in a confined aquifer. *J. Hydrol.* 307 (1-4): 48-59.
- Lu, C., P. Xin, L. Li, and J. Luo (2015), Steady state analytical solutions for pumping in a fully bounded rectangular aquifer, *Water Resour. Res.*, 51, 8294-8302, doi:10.1002/2015WR017019.
- Luo, J., Kitanidis, PK., 2004. Fluid residence times within a recirculation zone created by an extraction-injection well pair. *J. Hydrol.* 295(1-4):149-162.