هیدروژئولوژی، سال هشتم، شماره ۲، زمستان ۱۴۰۲
Hydrogeology, Volume 8, No. 2, Winter 2024

مقایسه‌ی انتشار ترک‌های هیدرولیکی دوبعدی کرنش صفحه‌ای و شعاعی در مقیاس گرانروی با رویکرد تحلیلی

علی عسگری[1*]، علی‌اکبر گلشنی[2]

۱- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی و فناوری، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.
۲- دانشیار، گروه مکانیک خاک و پی، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.
* نویسنده مسئول: a.asgari@umz.ac.ir

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۱/۰۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۳/۱۵

چکیده

فراسنج‌های مختلفی نظیر گرانروی، جرم مخصوص سیال و سختی محیط در فرآیند رشد شکست هیدرولیکی تاثیر دارند. این فراسنج‌ها اثرات یکسانی بر چگونگی رشد ندارند و ممکن است یک یا چند تا از فراسنج‌ها تاثیر بیشتری داشته باشند؛ در نتیجه منجر به یک یا چند رژیم خاص خواهد شد. رژیم‌ها بر اساس روند هدر رفت انرژی نامگذاری می‌شوند که مهمترین آن‌ها عبارتند از: اول: رژیم سختی که بیشترین انرژی تزریق سیال از طریق شکافتن سنگ به‌دلیل سختی اتلاف می‌شود دوم: رژیم گرانروی که بیشترین اتلاف توان ورودی سیال ناشی از حرکت سیال لزج و در داخل ترک است. در این پژوهش به بررسی رشد ترک هیدرولیکی با شکل هندسی مختلف از قبیل ترک دوبعدی کرنش صفحه‌ای و شعاعی در یک محیط سنگی شکننده (کشسان) پرداخته می‌شود. سیال به‌صورت غیرقابل تراکم و نیوتنی فرض می‌شود و همچنین رشد ترک در قالب مکانیک شکست خطی کشسان بررسی می‌شود. هدف از این بخش، دستیابی به اثرات هندسه ترک است. نتایج نشان می‌دهد که روش‌های شبه تحلیلی ارائه شده برای حل معادلات همبسته، از دقت کافی و سرعت همگرایی بالا برخوردار است. در زمان‌های زودهنگام از فرآیند شکست هیدرولیکی، ترک‌های صفحه‌ای رشد سریعتری نسبت به ترک‌ها با هندسه‌ی سکه‌ای شکل دارند، اما در زمان‌های بعدی سرعت رشد ترک‌های سکه‌ای به‌شدت از ترک صفحه‌ای پیشی می‌گیرند. میزان بازشدگی عرض ترک صفحه‌ای از ترک سکه‌ای شکل بیشتر است و همین امر باعث شد که در رژیم گرانروی میزان رشد آن کاهش چشمگیری داشته باشد.

واژه‌های کلیدی: ترک دوبعدی کرنش صفحه‌ای، ترک شعاعی ، رژیم گرانروی، روش شبه‌تحلیلی، شکست هیدرولیکی.

مقدمه

محیط‌های سنگی متخلخل زیرزمینی، مخزن سیالات ارزشمندی همچون آب‌های زیرزمینی، نفت، گاز مایع و گاز طبیعی می‌باشند که دسترسی به این مخازن از طریق حفر چاه صورت می‌گیرد. به منظور تحریک مخزن که به افزایش استخراج نفت و گاز حدودا ۲ تا ۵ برابری منجر می‌شود، استفاده از روش شکست هیدرولیکی بسیار کاربردی است. کاربردهای شکست هیدرولیکی تنها به صنعت نفت محدود نشده و در زمینه‌هایی همچون ایجاد مخازن نگهداری زیرزمینی گاز کربنیک در سنگ نمک، طراحی سازه‌های بزرگ و زیرزمینی از جمله مغار نیروگاه‌ها، تعیین تنش‌های برجا در عملیات سدسازی، احداث تونل‌های آب،

راه و معدنی (Detournay et al., 1989)، طراحی معادن به منظور کاهش خطرات استحصال و یا مقابله با حوادث ناشی از نشت گاز، کشف و گسترش منابع آب‌های زیرزمینی و معدنی (Economides et al., 2000)، احیا چاه‌های هیدروکربنی با عملکرد بالا (Yu et al., 2023)، صنایع محیط زیست به منظور روند بازیافت زباله (Frank and Barkley, 1995) و دفن مواد زائد و مضر زیست محیطی (Abou-Sayed et al., 1989; De Laguna et al., 1968)، پیش بینی امکان رخداد زلزله و کاهش خطرات آن با ایجاد پیش لرزه‌های دست ساز (He et al., 2023; Hui et al., 2023; Rutledge et al., 2004; Shan et al., 2023)، صنایع انرژی آینده مانند استفاده در استحصال انرژی زمین گرمایش (Bunger et al., 2013; Nygren and Ghassemi, 2006; Xue et al., 2023 ; اصغری سراسکانرود و همکاران، ۱۴۰۲; علوی و همکاران، ۱۳۹۸) نیز کاربردی است.

در عملیات شکست هیدرولیکی، یکی از روش‌های پرکاربرد و ویژه در مهندسی ژئومکانیک، سیال خاصی با فشار به داخل قسمت محصور شده از چاه پمپ می‌شود؛ این فشار تا زمان ایجاد شکستگی‌های جدید و یا باز شدن آن‌ها افزایش خواهد یافت. فشار سیال مورد نیاز جهت گسترش شکستگی و مدت زمان ادامه یافتن ترک‌ها، به تنش حاکم برجا، دبی جریان، گرانروی و ماند سیال، اختلاف فشار بین مخزن و چاه، سختی و نفوذپذیری محیط، و غیره بستگی دارد. مسلما همه پارامترهای اشاره شده دارای اهمیت یکسان نیستند. وقتی برخی از این پارامترها از اهمیت بیشتری نسبت به بقیه برخوردار باشند منجر به رژیم خاصی می‌شوند. رژیم‌ها بر اساس مکانیزم هدر رفت انرژی نام‌گذاری می‌شوند که مهم‌ترین آن‌ها در شکست هیدرولیکی عبارتند از؛ اول: رژیم سختی که بیشترین هدر رفت انرژی تولید شده ناشی از تزریق سیال در فرآیند شکست هیدرولیکی، مربوط به فراسنج سختی محیط (سنگ) است و در این صورت انرژی هدر رفت ناشی از گرانروی ناچیز است. دوم: رژیم گرانروی که مقاومت سیال در مقابل جریان باعث هدر رفت انرژی می‌شود. بدیهی است که الگوسازی تحلیلی در یک رژیم خاص آسان‌تر خواهد بود.

طی دهه‌های اخیر، پژوهشگران تلاش‌های فراوانی بر روی الگو-سازی فرآیند شکست هیدرولیکی انجام داده‌اند. در بخش بعد برخی از این تلاش‌ها و مطالعات در زمینه‌های الگوسازی‌های شکست هیدرولیکی فهرست شده‌اند. بخش مهمی از این پژوهش‌ها مختص به گسترش روش‌های تحلیلی و یا شبه تحلیلی[1] است (Advani et al., 1990; Clifton and Abou-Sayed, 1981; Ingraffea and Boone, 1988; Shah et al., 1997; Sousa et al., 1993). بررسی با روش‌های تحلیلی و یا نیمه تحلیلی بر روی یک شکست هیدرولیکی با هندسه ساده (صفحه‌ای یا دیسک شکل) در یک سنگ هموژن با تنش برجای یکنواخت پیچیده است که به طبیعت الگوسازی ریاضی مسئله برمی‌گردد (Garagash, 2006) و ممکن است برای دستیابی به چنین حل‌هایی، نیاز به ایده‌آل سازی و فرض رشد شکست هیدرولیکی در یک رژیم خاص باشد. با وجود این محدودیت‌ها، الگوهای ایده‌آل سازی شده از دو جهت اهمیت دارند: اول اینکه آن‌ها معیاری[2] برای مقایسه با شبیه‌سازی‌ها و روش‌های عددی هستند و دوم اینکه یک ابزار برای بررسی اثرات فراسنج‌های مختلف در یک رژیم خاص هستند.

امروزه الگوهای متنوعی به منظور بررسی رشد شکست هیدرولیکی مطرح شده‌است که شامل الگوی دوبعدی، شبه‌سه-بعدی و سه‌بعدی است. پژوهشگران مسئله را با جنبه‌های تحلیلی و عددی و با فرض‌های مختلف دوبعدی (Abe et al., 1976; Geertsma and De Klerk, 1969; Nordgren, 1972; Perkins and Kern, 1961; YuP and Khristianovitch, 1955) و سه بعدی (Settari and Cleary, 1986; Simonson et al., 1978; Warpinski and Smith, 1989) بررسی کردند. بیشترین الگو-هایی که در پژوهش‌های مرتبط با شکست هیدرولیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد عبارتند از: الگوی کرنش مسطح دو بعدی[3] (Geertsma and De Klerk, 1969; YuP and Khristianovitch, 1955 ; عسگری و گلشنی، ۱۳۹۴; عسگری و گلشنی، ۱۳۹۸; عسگری و گلشنی، ۱۳۹۹; عسگری و همکاران، ۱۳۹۵) ، سکه‌ای شکل یا دیسکی[4] (Abe et al., 1976; Bunger and Detournay, 2005, a; Hu and Wang, 2024; Lecampion and Desroches, 2015; Ma et al., 2024; Savitski and

[1] semi-analytical method
[2] benchmark
[3] Khristianovic and Zheltov; Geertsma and de Klerk (KGD or KZGD)
[4] penny shape or radial

و تیغه‌ای یا انگشتی شکل[5] (Adachi and Detournay, 2002; Peirce, 2008; Asgari, 2022; Kovalyshen and Detournay, 2010; Nordgren, 1972; Perkins and Kern, 1961; Sarvaramini and Garagash, 2015 ; عسگری و گلشنی، ۱۴۰۰).

پیشینه پژوهش

در میان الگوهای تحلیلی یا نیمه تحلیلی، ذکر کارهای اولیه انجام شده در مراجع (Barenblatt, 1959; Geertsma and De Klerk, 1969; Geertsma and Haafkens, 1979; Khristianovic and Zheltov, 1955; Nordgren, 1972; Perkins and Kern, 1961) از اهمیت خاصی برخوردار است. ایـن پژوهشگران یـکی از الگوهای ساده در شکل ۱ را مورد توجه قرار دادند، اما فرضیات بسیار ساده‌کننده‌ای را در مورد متغیرهای مساله بالاخص بازشدگی ترک و فشار سیال استفاده کردند. مجموعه بـرخی از این الگوها را در نوشته‌های (Geertsma, 1989; Mack and Warpinski, 2000; Naceur and Economides, 1989) نیز می‌توان پیدا کرد.

اسپنس و همکارانش (Spence and Sharp, 1985) یک راه‌حل خودمتشابه[6] برای بررسی گسترش ترک KGD در یک محیط کشسان نفوذ ناپذیر با سختی محدود[7] ارائه کردند. آن‌ها با تعیین معادلات همبسته همچون معادله‌ی جریان سیال ویسکوز تراکم ناپذیر در ترک با استفاده از نگره روانسازی، معادله‌ی کشسانی در حالت کرنش مسطح برای الگوسازی بازشدگی ترک تحت توزیع فشار مشخص، رابطه‌ی رشد ترک با استفاده از حد ریشه دوم در نوک[8] برای بازشدگی ترک و معیار رشد ترک[9] با استفاده از فاکتور شدت تنش[10]، $K_{IC} = K_I$ مساله را تحلیل کردند.

به دنبال روش اسپنس و شارپ (Spence and Sharp, 1985)، کاربونل (Carbonell, 1996b) راه حل خودمتشابه برای حالت مجانبی سختی صفر معرفی کرد. این حل بر اساس روشی است که حل نوک مجانبی[11] SCR، (Desroches et al., 1994) نامیده می‌شود. در این روش رفتار مجانبی بازشدگی و فشار در نزدیکی نوک ترک تشریح شده است.

اگرچه یک روش عددی توسط اسپنس و شارپ (Spence and Sharp, 1985) برای حل مسئله در یک رژیم مابین سختی و گرانروی ارائه و بعدها توسط آداچی (Adachi, 2001) بازبینی شد ولی بسیاری از پژوهشگران برای ساده‌تر شدن تحلیل مسئله، آن را به‌صورت یکی از رژیمی‌های سختی (هدر رفت انرژی ناشی از چقرمگی یا سختی بالای سنگ) (Garagash, 2006) یا گرانروی (هدر رفت انرژی ناشی از گرانروی بالای سیال) (Garagash and Detournay, 2002; Nilson, 1981; Spence and Sharp, 1985) در نظر گرفتند.

Savitski and Detournay, 2002 راه حل خودمتشابه را برای مساله گسترش ترک سکه‌ای شکل در محیط کشسان نفوذ ناپذیر با سختی صفر و سیال نیوتنی به‌کار گرفت. این راه حل بر اساس روش اسپنس (Spence and Sharp, 1985) است، با این مفهوم که در این راه حل، فشار و بازشدگی به صورت یک سری از چند جمله‌ای ژاکوبی بیان می‌شود که ضرایب این سری‌ها باهم فرق می‌کنند. البته این راه‌حل با حل اسپنس (Spence and Sharp, 1985) و کاربونل (Carbonell, 1996b) متفاوت است. همگرایی عددی این روش به طرز چشمگیری خوب است زیرا توابع پایه برای بسط سری‌های فشار و بازشدگی به‌صورت یک به یک از طریق معادله‌ی کشسانی مربوط نیستند. (برای جزئیات بیشتر به مراجع (Savitski and Detournay, 2001; Savitski and Detournay, 2002) مراجعه شود.)

Garagash, 2000 یک راه‌حل خودمتشابه مجانب شونده[12] را برای گسترش ترک صفحه‌ای KGD در محیط کشسان نفوذ ناپذیر و با فرض در حالت سختی بالا[13] و ثابت بودن نرخ تزریق سیال (سیال نیوتنی) ارائه کرد. در این راه حل بازشدگی ترک با استفاده از حد ریشه دوم[14] و فشار در نوک از تابع تکینگی لگاریتمی[15] به‌صورت همبسته با دیگر معادلات حاکم تعیین گردید.

Esfandiari and Pak, 2023 با مقایسه‌ای، بین راه حل‌های عددی و تحلیلی مدل‌های KGD و PKN نشان دادند که راه حل‌های تحلیلی ممکن است به دلیل در نظر گرفتن ناکافی اثرات

5 fingerlike crack
6 self-similar solution
7 finite toughness
8 square-root tip asymptote
9 propagation condition
10 stress intensity factor
11 tip asymptote
12 asymptotic self-similar solution
13 large toughness
14 square-root asymptote
15 logarithmic singularity

تنش درجا دقت کمتری داشته باشند. پیشنهاد شد که اعمال ضریب اصلاحی هنگام تخمین پاسخ مدل می‌تواند نمایش دقیق‌تری از اثرات تنش درجا ایجاد کند.

Dontsov, 2016 یک راه حل تقریبی برای لحاظ کردن اثرات گرانروی سیال، چقرمگی سنگ و نشت، حاکم بر گسترش ترک سکه‌ای شکل ارائه کرد. کارهای انجام شده توسط ژانگ و همکارانش (Zhang et al., 2002) در رابطه با گسترش ترک هیدرولیکی سکه‌ای شکل نزدیک به سطح آزاد با ارزش است. کاربرد این کار در حفاری معادن در عملیات معدنکاری در مقیاس بزرگ می‌باشد. همچنین ژانگ و همکاران (Zhuang et al., 2023) یک مدل شکست هیدرولیکی سکه‌ای شکل را معرفی کردند که اثرات میدان تنش اولیه، سختی محیط و شیب لایه، در محیط زمین‌شناسی زیرزمینی را درنظر می‌گیرد.

این نکته قابل اهمیت است که استخراج گرما از مخازن زمین گرمایی توسط تزریق سیال با گرانروی کم انجام می‌شود (Garagash, 2006). همچنین در شرایط آزمایشگاهی، رژیم حاکم همواره سختی محیط خواهد بود حتی اگر یک سیال بسیار گرانرو به‌کار گرفته شود (Bunger et al., 2005). بنابراین این کاربردها در شکست هیدرولیکی ارتباط تحلیل الگوی بدست آمده را در رژیم سختی تضمین می‌کند. الگوسازی و تحلیل مسائل شامل رشد و انتشار ترک‌های هیدرولیکی به‌دلیل اندرکنش غیرخطی از درجه بالای بین سیال و محیط (مانند سنگ یا خاک) و شرایط مرزی پیشرونده بسیار پیچیده است.

Ismail and Azadbakht, 2024 مروری بر انتخاب نوع شبیه‌سازی عددی و مدل‌سازی تحلیلی شکست هیدرولیکی با تاثیرپذیری فراسنج‌هایی نظیر شرایط ژئومکانیکی، زمین‌شناسی و دینامیک سیالات انجام دادند. آن‌ها انواع مختلفی از الگوهای ترک را مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان می‌دهد که انتخاب روش شبیه‌سازی در شکست هیدرولیکی به جنبه خاص مورد مطالعه بستگی دارد که هر کدام نقاط قوت و محدودیت‌های خود را دارند.

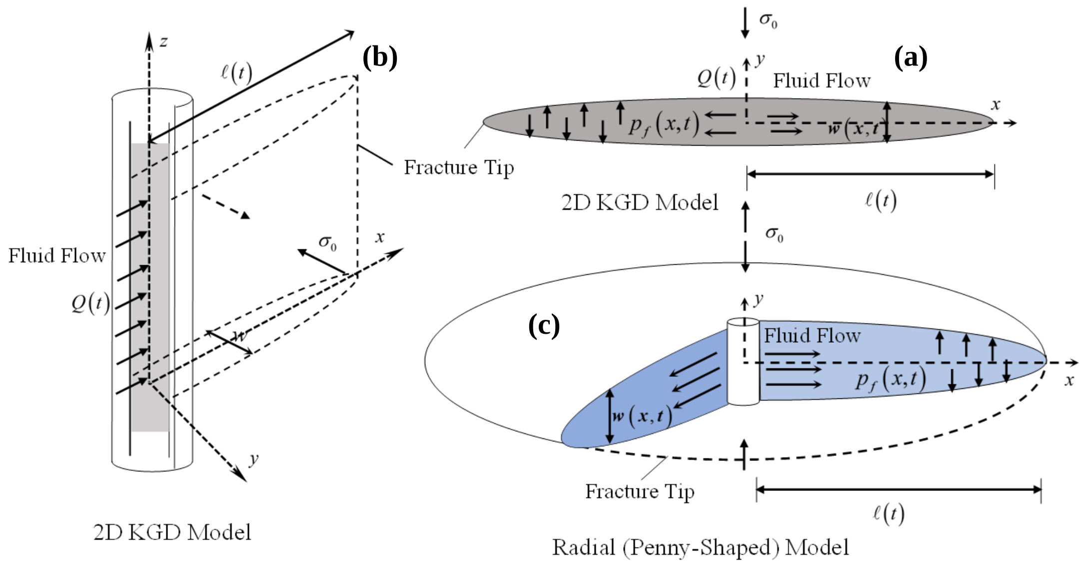
در این نوشتار برای حل در مقیاس گرانروی از یک روش نیمه تحلیلی استفاده می‌شود که روابط اولیه آن توسط اسپنس و شارپ (Spence and Sharp, 1985) ارائه شد و بعدها توسط آداچی (Adachi, 2001) و گاراگاش و دتورنی (Garagash and Detournay, 2002) برای ترک KGD و ساوتسکی و دتورنی (Savitski and Detournay, 2002) برای ترک شعاعی توسعه داده شد. این بررسی برای محدوده‌ی $K_m \lesssim 1$ [16] (فراسنج سختی در رژیم گرانروی) اعتبار دارد. سپس اثرات این دو نوع الگو بر روی پاسخ‌ها تحت تزریق هیدرولیکی به صورت دقیق مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرد.

فرمول‌بندی ریاضی مساله

تعریف مسئله

ترک هیدرولیکی مطابق با شکل ۱ به طول $2\ell(t)$ در یک محیط سنگی همگن و شکننده با مدول یانگ E، ضریب پواسون υ و چقرمگی K_{IC} در نظر گرفته می‌شود. به‌دلیل تقارن ترک‌های صفحه‌ای کرنش مسطح (مطابق شکل ۱-الف و ب) و سکه‌ای (شکل ۱ج) می‌توان نیمی از الگوی ترک را در تحلیل منظور کرد. سیال با گرانروی μ و با دبی $Q(t)$ تزریق می‌شود. تزریق این سیال باعث فشار داخلی $P_f(x,t)$ در سطوح ترک می‌شود. با توجه به اینکه محیط تحت تنش محدود کننده σ_0 قرار دارد؛ در نتیجه فشار خالص در دامنه ترک برابر با $P(x,t)=P_f(x,t)-\sigma_0$ است. نگره مکانیک شکست کشسان خطی (LEFM) برای تعیین بازشدگی ترک $w(x,t)$، فشار خالص $P(x,t)$ و رشد ترک $\ell(t)$ بر حسب زمان t و مختصات محلی x به‌کار گرفته می‌شود.

[16] M-vertex solution



شکل ۱- دو الگوی متداول شکست هیدرولیکی از منظر هندسی.

Figure 1- Two common patterns of hydraulic fracture from a geometric point of view.

معادلات حاکم

معادله‌ی کشسانی

معادله‌ی کشسانی، بازشدگی ترک را با فشار خالص سیال داخل ترک با یک رابطه‌ی انتگرالی مربوط می‌سازد. رابطه‌ی انتگرالی به شکل رابطه‌ی ۱ و به صورت یک معادله‌ی انتگرالی منفرد است. فرض رابطه اینست که ترک به شکل شبه استاتیکی رشد می‌کند (Sneddon et al., 1969).

$$P(x,t)=P_f(x,t)-\sigma_0=-\frac{E'}{2\pi\ell}\int_0^1\frac{\partial w(\xi'\ell,t)}{\partial\xi'}M_n\left(\frac{x}{\ell},\xi'\right)d\xi', \quad (۱)$$

$$2D\rightarrow M_0(\xi,\xi')=\frac{\xi'}{\xi'^2-\xi^2},\ \xi=\frac{x}{\ell},\quad \xi'=\frac{s}{\ell},\quad E'=\frac{E}{1-\nu^2}$$

$$\text{Radial}\rightarrow\begin{cases}M_1(\xi,\xi')=\frac{1}{\xi}\mathrm{K}\left(\frac{\xi'^2}{\xi^2}\right)+\frac{\xi}{\xi'^2-\xi^2}\mathrm{E}\left(\frac{\xi'^2}{\xi^2}\right), & \xi>\xi'\\ M_1(\xi,\xi')=\frac{\xi'}{\xi'^2-\xi^2}\mathrm{E}\left(\frac{\xi^2}{\xi'^2}\right), & \xi<\xi'\end{cases}$$

که در آن s یک متغییر کمکی جهت انتگرال‌گیری تعریف می‌شود. رابطه‌ی انتگرالی فوق یک رابطه‌ی انتگرالی کوشی[17] است که در آن K و E به ترتیب انتگرال بیضوی کامل نوع اول[18] و انتگرال بیضوی کامل نوع دوم[19] است.

معادله‌ی فوق را می‌توان با اصل برهم‌نهی جابجایی‌های لبه‌ای جهش‌یافته[20] بدست آورد که ترکیب ترم $\partial w/\partial s$ چگالی جابجایی[21] و ترم M کرنل ساده کوشی[22] است (Bilby and Eshelby, 1968). شکل معکوس از معادله‌ی ۱ توسط سندون و لونگراب در سال ۱۹۶۹ (Sneddon et al., 1969) به‌صورت زیر ارائه شد.

$$w(x,t)=\frac{2^{n+2}}{E'}\frac{\ell^{-n}}{\pi}\int_0^\ell G_n\left(\frac{x}{\ell},\frac{s}{\ell}\right)P(s,t)s^n ds,\ n=\begin{cases}0 & 2D\\ 1 & \text{Radial}\end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases}2D\rightarrow G_0(\xi,\xi')=\ln\left|\frac{\sqrt{1-\xi^2}+\sqrt{1-\xi'^2}}{\sqrt{1-\xi^2}-\sqrt{1-\xi'^2}}\right|\\ \text{Radial}\rightarrow\begin{cases}G_1(\xi,\xi')=\frac{1}{\xi}F\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\xi'^2}},\frac{\xi'^2}{\xi^2}\right), & \xi>\xi'\\ G_1(\xi,\xi')=\frac{1}{\xi'}F\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\xi'^2}{1-\xi^2}},\frac{\xi^2}{\xi'^2}\right), & \xi<\xi'\end{cases}\end{cases}$$

معادله‌ی حرکت سیال

فرض می‌شود که حرکت سیال در جهت رشد ترک امتداد می‌یابد و جریان سیال در ترک آرام و سیال غیر قابل تراکم است.

[17] Cauchy principal value
[18] complete elliptic integral of the first kind
[19] complete elliptic integral of the second kind

[20] superposition of climbing dislocation
[21] dislocation density
[22] simple Cauchy kernel

در این‌صورت معادله‌ی جریان یک سویه در جهت x و با استفاده از معادله‌ی ناویر–استوکس با فرض صرف نظرکردن از نیروی وزنی (شتاب ثقلی)، به‌صورت زیر بیان می‌شود (Batchelor, 1967; Nilson, 1981; Ockendon, 1995; Shapiro, 1954):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial v_x^2}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_f}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \qquad (۳)$$

که در آن ρ جرم مخصوص سیال ، و μ گرانروی سیال هستند. در معادله‌ی فوق، اگر سرعت در جهت x در سطوح ترک برابر با صفر است. از حل معادله‌ی ناویر استوکس می‌توان نتیجه گرفت که سرعت در همین راستا به‌صورت یک تابع سهمی از مرتبه دوم است (به‌طور مثال در مرجع (Batchelor, 1967) اشاره شده است). با صرفنظر کردن از ترم سمت چپ و یا ناچیز فرض کردن اثر ماند معادله‌ی به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial P_f}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=0 \qquad (۴)$$

در این حالت تابع سرعت سهمی شکل فرض می‌شود و سرعت در سطوح ترک برابر صفر باشد ($v_x\big|_{y=-w/2}=0,\ v_x\big|_{y=w/2}=0$)، آنگاه رابطه‌های ۲-۹، به‌صورت رابطه‌ی زیر درمی‌آید که آن معادله را تقریب یا الگوی روانسازی[۲۳]، می‌نامند (Batchelor, 1967):

$$v_x=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P_f}{\partial x}\left(\frac{w^2}{4}-y^2\right),\ \ v_x=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\left(\frac{w^2}{4}-y^2\right) \qquad (۵)$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۵ در نرخ جریان برای واحد طول ترک $q=\int_{-w/2}^{w/2} v_x dy$، به معادله‌ی پویزنی[۲۴] KGD و شعاعی خواهیم رسید.

$$q=-\frac{w^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x},\ \ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=\frac{12v}{w^2} \qquad (۶)$$

که در آن q نرخ جریان سیال یا فلاکس عبوری است.

معادله‌ی پیوستگی و قانون بقای جرم

جریان سیال در ترک با قانون بقای جرم و اندازه حرکت مدل می‌شود. مطابق با قانون بقای جرم برای یک سیال غیرقابل تراکم، حجم سیال ورودی یا تزریقی $V(t)$ با حجم باز شده ترک برابر است:

$$\frac{1}{x^n}\frac{\partial\left(x^n q\right)}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t}=0, \qquad (۷)$$

$$\left\{ q=\int_{-w/2}^{w/2} v_x dy=vw,\quad V(t)=\int_0^t Qdt=Q_0 t=2\pi^n\int_0^{\ell} wx^n dx \right.$$

که در آن $v(x,t)$، سرعت متوسط سیال در طول ترک است و سرعت سیال در نوک ترک $v(x=\ell,t)$برابر با سرعت رشد در نوک ترک $d\ell/dt$ است؛ در صورتی‌که مقدار پس افتادگی سیال صفر باشد.

با جایگذاری معادله‌ی پویزنی ۶ در رابطه‌ی ۷، معادله‌ی رینولدز به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{1}{\mu'}\frac{\partial}{x^n\partial x}\left(x^n w^3\frac{\partial P}{\partial x}\right),\ \mu'=12\mu \qquad (۸)$$

شرایط اولیه و مرزی

شرایط مرزی در نوک ترک

نرخ جریان سیال یا فلاکس عبوری و بازشدگی ترک در نوک ترک $x=\pm\ell$ در تمام لحظات برابر صفر است.

$$w=0,\quad q=0,\qquad x=\pm\ell. \qquad (۹)$$

با استفاده از شرط $q=0$، در نوک ترک داریم:

$$w^3\frac{\partial p}{\partial x}=0,\ \ x=\pm\ell. \qquad (۱۰)$$

شرایط اولیه و مرزی در محل تزریق

در محل تزریق $x=0$ نرخ جریان سیال یک ناپیوستگی وجود دارد که می‌توان مسئله به‌صورت متقارن فرض کرد:

$$\lim_{x\to 0} x^n q\left(x,t\right)=\frac{Q_0}{2\pi^n} \qquad (۱۱)$$

که در آن Q_0، دبی سیال، با نرخ ثابت تزریق می‌شود. از آنجایی که $w>0$ است در نتیجه گرادیان و تغییرات فشار نسبت به طول در محل تزریق به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{x=0^+}=\frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{x=0^-}<0. \qquad (۱۲)$$

شرایط اولیه مسئله به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\ell=0,\ w=0,\ P=0,\ \to t=0. \qquad (۱۳)$$

---

[23] Lubrication approximation or lubrication model

[24] Poiseuille equation

مطابق با مکانیک شکست الاستیک خطی مصالح، تنش در نزدیکی ناحیه نوک ترک[۲۵] و بازشدگی ترک با یک رابطه‌ی حدی ریشه دوم بیان می‌شود (Rice, 1968):

$$w=\frac{8}{\sqrt{2\pi}}\frac{K_I}{E'}\sqrt{\ell-x}+O\left[(\ell-x)^{3/2}\right],x\to\pm\ell,\ \ K'=\frac{8}{\sqrt{2\pi}}K_{IC} \quad (۱۴)$$

درجائی‌که K_I فاکتور شدت تنش برای مود یک و یا بازشدگی است که می‌توان آن‌را به‌صورت یک تابع انتگرالی از فشار بیان کرد (Adachi et al., 2010; Rice, 1968):

$$K_I=\frac{2}{\ell^n}\sqrt{\frac{\ell}{\pi}}\int_0^{\ell}\frac{P}{\sqrt{\ell^2-x^2}}x^n dx \quad (۱۵)$$

شرط اضافی دیگری برای معیار رشد ترک نیاز است. با فرض اینکه ترک به‌شکل شبه استاتیکی گسترش می‌یابد، این شرط به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$F=K_I-K_{IC}=0 \quad (۱۶)$$

که در آن K_{IC} چقرمگی محیط است. اگر مقدار F مساوی صفر باشد ترک در حالت تعادل حدی[۲۶] رشد خواهد کرد.

مقیاس سازی

مقیاس‌سازی در این پژوهش برپایه پژوهش‌های اولیه دتورنی (Detournay, 2004) است که مفهوم اصلی آن این است که گسترش ترک هیدرولیکی در محیط شکننده و نفوذناپذیر نمی‌تواند فقط بر پایه‌ی یک مقیاس یکتا مانند زمان یا طول باشد بلکه باید قوانین آن به گونه‌ای باشد که در برگیرنده انواع رژیم‌ها در رشد ترک باشد و ارتباط بین رژیم‌ها را تضمین کند. در معادلات حاکمه ذکر شده ۵ فراسنج مهم از قبیل: دبی تزریق Q_0، مدول کشسانی کرنش صفحه‌ای E'، گرانروی سیال μ، جرم مخصوص سیال ρ و چقرمگی محیط K_{IC} وجود دارد. تنش برجای محیط σ_0 در اینجا فقط به‌عنوان یک سطح مبنا برای فشار سیال درنظر گرفته می‌شود. با مشخص شدن فراسنج‌های موثر مسئله، می‌توان گفت که طول نیم‌ترک، ℓ تابعی از فراسنج-های معرفی شده است.

$$\ell=\ell\left(t,Q_0,E',\mu',\rho,\ K'\right). \quad (۱۷)$$

مطابق با تحلیل ابعادی[۲۷](Barenblatt, 1996) می‌توان ثابت کرد که طول نیم‌ترک به‌صورت حاصل‌ضرب مقیاس طول L [۲۸] و تابعی از سه فراسنج بی‌بعد $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2$ و P_3 می‌باشد.

$$\ell=L\gamma\left(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3\right). \quad (۱۸)$$

که در آن $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2$ و P_3 تابعی از پنج فراسنج اصلی و زمان هستند و γ یک ضریب طول مقیاس شده یا بدون بعد است. با توجه به یک بعدی بودن مسئله و داشتن یک محور مختصات متحرک، مشتقات مکانی و زمانی، باتوجه به قاعده زنجیره‌ای[۲۹] به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big|_x=\frac{1}{L\gamma}\frac{\partial}{\partial\xi}\Big|_\xi,\quad \frac{\partial}{\partial t}\Big|_x=\frac{\partial}{\partial t}\Big|_\xi-\xi\frac{\dot{\ell}}{\ell}\frac{\partial}{\partial\xi} \quad (۱۹)$$

که در آن علامت (.) اشاره به مشتق نسبت به زمان دارد. برای بی‌بعد کردن بازشدگی ترک از طول مقیاس شده L استفاده می-شود.

$$w\left(x,t\right)=\varepsilon_w L\Omega\left(\xi;\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3\right) \quad (۲۰)$$

که درآن ε_w به عنوان یک فراسنج کوچک است چراکه L با ℓ هم‌مرتبه هستند و $w/\ell<<1$ یکی از فرضیات مسئله است. تابع Ω بیانگر میزان بازشدگی بی‌بعد است. به‌طور مشابه فشار خالص سیال، P، را می‌توان با استفاده از مدول کشسانی E' مقیاس کرد.

$$P\left(x,t\right)=\varepsilon_p E'\Pi\left(\xi;\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3\right) \quad (۲۱)$$

که درآن ε_p به عنوان یک فراسنج کوچک است و نشان می‌دهد $P/E'<<1$ است. همچنین تابع Π بیانگر میزان فشار خالص بی-بعد است. با در نظرگیری نگره کشسانی خطی، می‌توان ثابت کرد که دو فراسنج ε_w و ε_p هم مرتبه هستند. بنابراین آن را معادل و هم‌ارز هم قرار می‌دهیم، یعنی؛ $\varepsilon_w=\varepsilon_p\equiv\varepsilon$.

همچنین نرخ جریان از رابطه‌ی زیر مقیاس و بی‌بعد می‌شود:

$$q\left(x,t\right)=Q_0\Psi\left(\xi;\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3\right) \quad (۲۲)$$

که Ψ در آن نرخ جریان بی بعد است.

معادلات حاکم بدون بعد شده

- معادله‌ی اندازه حرکت و بقای جرم: معادله‌ی بی‌بعد شده روابط ۷ و ۸ هستند.

[25] near-tip region
[26] limit equilibrium
[27] dimensional analysis
[28] length scale
[29] chain rule

$$\left(\frac{\dot{\varepsilon}t}{\varepsilon}+\frac{\dot{L}t}{L}\right)\Omega+\dot{\Omega}t-\xi\left(\frac{\dot{\gamma}t}{\gamma}+\frac{\dot{L}t}{L}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}=\frac{\varepsilon^3E't}{\mu'}\frac{1}{\gamma^2\xi^n}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^n\Omega^3\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}\right) \quad (۲۳)$$

$$2\pi^n\varepsilon L^{n+2}\gamma^{n+1}\int_0^1\Omega\,\xi^n\,d\xi=Q_0t. \quad (۲۴)$$

- معادله‌ی کشسانی: معادله‌ی بی‌بعد شده روابط ۱ و ۲ هستند.

$$\Pi(\xi,t)=L\ \{\Omega\}(\xi,t)=-\frac{1}{2\pi\gamma}\int_0^1\frac{\partial\Omega}{\partial\xi'}M_n(\xi,\xi')\,d\xi', \quad (۲۵)$$

$$\Omega(\xi,t)=\frac{2^{n+2}}{\pi}\gamma\int_0^1G_n(\xi,\xi')\Pi(\xi',t)\xi'^n\,d\xi',$$

- معیار انتشار ترک: معادله‌ی بی‌بعد شده روابط ۱۴ و ۱۵ هستند.

$$\begin{cases}\Omega=\frac{K'}{\varepsilon E'L^{1/2}}\gamma^{1/2}(1-\xi)^{1/2}+O\left[(1-\xi)^{3/2}\right],\xi\to1,\mathrm{G_k}=\frac{K'}{\varepsilon E'L^{1/2}}\\ \mathrm{G_k}=\frac{2^{7/2}}{\pi}\gamma^{1/2}\int_0^1\frac{\Pi}{(1-\xi)^{1/2}}\xi^n\,d\xi\end{cases}, \quad (۲۶)$$

سه گروه بی بعد $\mathrm{G_k},\mathrm{G}_v$ و $\mathrm{G_\mu}$ در معادلات ۲۳ تا ۲۶ به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathrm{G}_v=\frac{Q_0t}{\varepsilon L^{n+2}},\mathrm{G_k}=\frac{K'}{\varepsilon L^{1/2}E'},\ \mathrm{G_\mu}=\frac{\mu'}{t\varepsilon^3E'}. \quad (۲۷)$$

که G_v مربوط به گروه حجم بی‌بعد سیال ذخیره شده ناشی از تزریق است. دو گروه $\mathrm{G_k}$ و $\mathrm{G_\mu}$ به ترتیب مربوط به گرانروی سیال و سختی محیط در حالت بی‌بعد شده هستند که ارتباط مستقیم با فرآیند اتلاف انرژی توسط گرانروی سیال و سختی محیط در روند گسترش ترک دارند. به‌طور معمول در هر رژیم گسترش، یک گروه از ذخیره سیال و یک گروه اتلاف انرژی نسبت به گروه مشابه غالب است که در آن‌صورت کمیت مربوط به گروه غالب برابر یک فرض و بقیه‌ی کمیت‌های بی‌بعد نسبت به آن‌ها تعیین می‌شوند. از آنجایی که در مسئله اشاره شده فقط یک گروه از ذخیره سیال وجود دارد، آن‌را برابر یک قرار می‌دهیم ($\mathrm{G}_v=Q_0t\varepsilon^{-1}L^{-2-n}\equiv1$) که در این‌صورت فراسنج کوچک $\varepsilon=Q_0tL^{-2-n}$ تعیین می‌گردد. در ادامه، اگر انرژی بیشتری بواسطه بالا بودن گرانروی سیال نسبت به مقدار سختی محیط اتلاف شود در این‌صورت رژیم گرانروی حاکم است و $\mathrm{G_\mu}$ برابر یک درنظرگرفته می‌شود و فراسنج‌های باقیمانده[30] نیز با این فرض تعیین می‌شوند. اگر بیشتر انرژی ورودی ناشی از بزرگی سختی محیط اتلاف شود، آنگاه رژیم سختی حاکم است که در این‌صورت $\mathrm{G_k}$ برابر یک است. با حذف یکی از کمیت‌ها در معادلات بی‌بعد شده، ما را قادر می‌سازد که مسئله به‌صورت خاص مورد بررسی قرار گیرد.

در نهایت $t\dot{L}/L$، $t\dot{\gamma}/\gamma$ و $t\dot{\varepsilon}/\varepsilon$ در معادلات ۲۳ و ۲۶ را می‌توان با اپراتور زمان مطابق با به‌کارگیری رابطه‌ی زیر جایگزین کرد.

$$t\frac{\partial}{\partial t}=\left(\frac{t\,\dot{\mathrm{G}}_\mathrm{k}}{\mathrm{G_k}}\right)\mathrm{G_k}\frac{\partial}{\partial\mathrm{G_k}}+\left(\frac{t\,\dot{\mathrm{G}}_\mathrm{m}}{\mathrm{G_m}}\right)\mathrm{G_m}\frac{\partial}{\partial\mathrm{G_m}} \quad (۲۸)$$

که در آن علامت نقطه در بالای فراسنج‌های مقیاسی به منظور مشتق آن نسبت به زمان t است.

مقیاس گرانروی

در این مقیاس فراسنج گرانروی در معادله‌ی رینولدز آشکار نیست و با قرار دادن یک بجای $\mathrm{G_\mu}\equiv1$ معادلات مقیاس شده در رژیم گرانروی حاصل می‌شود. در این صورت داریم:

$$\varepsilon_\mathrm{m}=\left(\frac{tE'}{\mu'}\right)^{\frac{n+2}{-3n-6}},\ \mathrm{L_m}=\left(\frac{Q_0^3t^4E'}{\mu'}\right)^{\frac{1}{3n+6}} \quad (۲۹)$$

که اندیس (m) بیانگر مقیاس گرانروی است. با استفاده از فراسنج‌های رابطه‌ی ۲۷، کمیت $\mathrm{G_k}$ در حالت رژیم گرانروی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{G_k}=\mathrm{K_m}=K'\left(\frac{Q_0^3\mu'^{3+2n}}{t^{2n}E'^{-4n-9}}\right)^{\frac{1}{2(-3n-6)}}, \quad (۳۰)$$

که در آن $\mathrm{K_m}$ فراسنج‌های سختی در رژیم گرانروی است. بنابراین تمام کمیت‌های مجهول مسئله تابعی از $\mathrm{K_m}$ می‌باشد:

$$\ell=L_\mathrm{m}\gamma_\mathrm{m}(\mathrm{K_m}),\ \ w(x,t)=\varepsilon_\mathrm{m}L_\mathrm{m}\gamma_\mathrm{m}\bar{\Omega}_\mathrm{m}(\xi;\mathrm{K_m}), \quad (۳۱)$$
$$P(x,t)=\varepsilon_\mathrm{m}E'\Pi_\mathrm{m}(\xi;\mathrm{K_m}).$$

همانطور که مشاهده می‌شود همه ضرایب مقیاس شده و فراسنج‌های بی‌بعد شده به‌صورت توابع توانی وابسته به زمان هستند و اگر سیال با دبی ثابت وارد ترک شود این نتیجه بدیهی است.

معادلات حاکم بدون بعد در مقیاس گرانروی

در این بخش به حل مساله ترک هیدرولیکی در دو حالت دو بعدی با شرط کرنش صفحه‌ای (KGD) و شعاعی در مقیاس گرانروی با دبی ورودی ثابت و سختی صفر $\mathrm{K_m}=0$ پرداخته

[30] evolution parameters

می‌شود. این حل از دو جهت اهمیت دارد. اول اینکه، تحلیل شروع رشد ترک در یک محیط نفوذناپذیر و بدون سختی را ارائه می‌کند. دوم اینکه می‌تواند اعتباری برای حل در محدوده سختی کم را نیز فراهم آورد.

با توجه به معادلات ارائه شده در مقیاس گرانروی در بخش قبل، این معادلات با توجه به شکل ترک و شرایط جدید $\mathrm{K_m}=0$ به‌صورت زیر کاهش می‌یابند:

- معادله‌ی کشسانی

$$\begin{cases}\Pi_{\mathrm{m0}}(\xi)=L\{\Omega_{\mathrm{m0}}\}(\xi,t)=-\dfrac{1}{2\pi\gamma_{\mathrm{m0}}}\displaystyle\int_0^1\frac{\partial\Omega_{\mathrm{m0}}}{\partial\xi'}M_n(\xi,\xi')\,d\xi',\\ \Omega_{\mathrm{m0}}(\xi,t)=\dfrac{2^{n+2}}{\pi}\gamma_{\mathrm{m0}}\displaystyle\int_0^1 G_n(\xi,\xi')\,\Pi_{\mathrm{m0}}(\xi',t)\xi'^n\,d\xi',\end{cases} \tag{۳۲}$$

اندیس صفر در مجهولات Ω_{m0}، γ_{m0} و Π_{m0} بیانگر این است که سختی برابر با صفر است ($\mathrm{K_m}=0$). در اینجا برای راحتی کار از تغییر متغیر جدیدی برای بازشدگی و نرخ جریان استفاده می‌شود.

$$\Omega_{\mathrm{m0}}=\gamma_{\mathrm{m0}}\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}},\qquad \Psi_{\mathrm{m0}}=\gamma_{\mathrm{m0}}^2\bar{\Psi}_{\mathrm{m0}} \tag{۳۳}$$

رابطه‌ی فوق را در معادله‌ی کشسانی جایگذاری می‌کنیم.

$$\Pi_{\mathrm{m0}}(\xi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{\partial\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}}}{\partial\xi'}M_n(\xi,\xi')\,d\xi' \tag{۳۴}$$

- معادله‌ی پوازنی

$$\bar{\Psi}_{\mathrm{m0}}=-\xi^n\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}}^3\frac{\partial\Pi_{\mathrm{m0}}}{\partial\xi} \tag{۳۵}$$

- معادله‌ی پیوستگی

$$-\frac{\partial\bar{\Psi}_{\mathrm{m0}}}{\partial\xi}=\left(\frac{2-n}{3n+6}\right)\xi^n\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}}-\frac{4}{3n+6}\xi^{n+1}\frac{\partial\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}}}{\partial\xi} \tag{۳۶}$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی فوق و اعمال شرایط مرزی در نوک ترک (رابطه‌ی ۳۹) داریم:

$$\bar{\Psi}_{\mathrm{m0}}=\int_\xi^1\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}}\xi^n d\xi+\frac{4}{3n+6}\xi^{n+1}\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}} \tag{۳۷}$$

- معیار انتشار ترک

$$\lim_{\xi\to1}\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}}(1-\xi)^{-1/2}=0,\ \text{or}\ \int_0^1\frac{\Pi_{\mathrm{m0}}}{(1-\xi)^{1/2}}\xi^n d\xi=0,\ \xi\to1 \tag{۳۸}$$

- شرایط مرزی در نوک و محل تزریق ترک

$$\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}}\big|_{\xi=1}=0,\ \bar{\Psi}_{\mathrm{m0}}\big|_{\xi=1}=0,\quad \frac{\partial\Pi_{\mathrm{m0}}}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0}<0,\ \bar{\Psi}_{\mathrm{m0}}\big|_{\xi=0}=\frac{\gamma_{\mathrm{m0}}^{-n-2}}{2\pi^n} \tag{۳۹}$$

- معادله‌ی تعادل جرم

با ترکیب رابطه‌ی ۳۹ با معادله‌ی ۳۷ داریم:

$$2\pi^n\gamma_{\mathrm{m0}}^{n+2}\int_0^1\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}}\,\xi^n\mathrm{d}\xi=1. \tag{۴۰}$$

رفتار در نوک ترک‌های KGD و شعاعی

چگونگی رفتار نواحی نوک ترک و رشد آن یکی از دغدغه‌های مهم در حل مسائل شکست است. حل‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلی در نواحی نوک ترک نه تنها اطلاعات مهمی در مورد روند رشد می‌دهد بلکه ما را قادر می‌سازد تا از آن به‌عنوان شرایط مرزی نوک در صحت‌سنجی حل‌های عددی، تحلیلی و شبه‌تحلیلی استفاده نماییم.

با توجه به معادله‌ی ۱۴ که بر مبنای مکانیک شکست خطی ارائه شد؛ شکل ترک در نوک محیط کشسان در مود اول شکست به‌صورت حد ریشه دوم از طول ترک است. اگر از چقرمگی محیط صرفنظر گردد آنگاه مطابق با همان رابطه، شکل ترک می‌بایست از رابطه‌ی $(\ell-x)^{3/2}$ پیروی کند. در صورتی‌که به‌دلیل همبسته بودن معادلات روانساز و کشسانی در نزدیکی نوک ترک رابطه‌ی شکل ترک به‌صورت $(\ell-x)^{2/3}$ است (Desroches et al., 1994; Spence and Sharp, 1985). در همین راستا فشار و تنش از رابطه‌ی $(\ell-x)^{-1/3}$ پیروی می‌کند.

روش حل در نزدیکی نوک ترک شبیه رفتار رشد یک ترک در محیط نیمه بی‌نهایت است. با این توصیف، نتایج حاصل از تحلیل مجانب شونده نوک ترک هیدرولیکی در میزان بازشدگی و فشار به‌صورت زیر است (Adachi, 2001; Carbonell, 1996a):

$$w_{\mathrm{m0}}=2^{1/3}3^{5/6}\left(\frac{\mu'\dot{\ell}\ell^2}{E'}\right)^{1/3}\hat{\xi}^{2/3}+\mathrm{O}\left(\hat{\xi}^{5/3}\right),\ \hat{\xi}=1-\xi,\ \hat{\xi}\to0 \tag{۴۱}$$

$$p_{\mathrm{m0}}=-6^{-2/3}\left(\frac{\mu'E'^2\dot{\ell}}{\ell}\right)^{1/3}\hat{\xi}^{-1/3}+\mathrm{O}\left(\hat{\xi}^{2/3}\right)$$

با جایگذاری روابط مقیاس در رابطه‌ی فوق داریم:

$$\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}}=2^{1/3}3^{5/6}\left(\frac{4}{3n+6}\right)^{1/3}(1-\xi)^{2/3}+\mathrm{O}\left((1-\xi)^{5/3}\right), \tag{۴۲}$$

$$\Pi_{\mathrm{m0}}=-6^{-2/3}\left(\frac{4}{3n+6}\right)^{1/3}(1-\xi)^{-1/3}+\mathrm{O}\left((1-\xi)^{2/3}\right),\ \begin{cases}n=0 & \text{KGD}\\ n=1 & \text{Radial}\end{cases}$$

تحلیل ترک‌ها در مقیاس گرانروی

تحلیل ترک دو بعدی KGD

به کمک حل اسپنس و شارپ در سال ۱۹۸۵، فرض می‌کنیم که میزان بازشدگی $\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}}$، فشار Π_{m0} و نرخ سیال $\bar{\Psi}_{\mathrm{m0}}$ به‌صورت زیر باشد.

$$\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}} \approx B\bar{\Omega}^{**}+\bar{\Omega}^{*}=B\bar{\Omega}^{**}+\sum_{j=0}^{m}A_j\bar{\Omega}_j^{*} \tag{۴۳}$$

$$\Pi_{\mathrm{m0}} \approx B\Pi^{**}+\Pi^{*}=B\Pi^{**}+\sum_{j=0}^{m}A_j\Pi_j^{*} \tag{۴۴}$$

$$\bar{\Psi}_{\mathrm{m0}} \approx B\bar{\Psi}^{**}+\bar{\Psi}^{*}=B\bar{\Psi}^{**}+\sum_{j=0}^{m}A_j\bar{\Psi}_j^{*} \tag{۴۵}$$

که در آن ترم‌های $\Pi^{**}, \bar{\Omega}^{**}$ و $\bar{\Psi}^{**}$ جواب‌های خصوصی معادلات هستند و رفتار مناسبی را از محیط در محل تزریق ترک ارائه می‌دهند (Adachi and Detournay, 2002; Carbonell, 1996a). ترم‌های $\Pi^{*}, \bar{\Omega}^{*}$ و $\bar{\Psi}^{*}$ جواب‌های عمومی معادلات هستند که رفتار نوک ترک را با توجه به روابط ۴۱ و ۴۲ انعکاس می‌دهند. A_j و B ضرایب مجهولی هستند که از جایگزینی جواب‌های فرض شده ۴۳، ۴۴ و ۴۵ در معادلات کشسانی و روانسازی تعیین می‌شوند. مقدار m یک عدد محدود است که بستگی به دقت تحلیل دارد. با توجه به رابطه‌ی ۴۱ ما می‌توانیم سری $\bar{\Omega}^{*}$ را به‌صورت زیر انتخاب کنیم:

$$\bar{\Omega}_0^{*}=\left(1-\xi^2\right)^{2/3},\ \ A_0=\sqrt{3} \tag{۴۶}$$

این نکته قابل ذکر است که با بسط تیلور در نقطه $\xi=1$ از رابطه‌ی ۴۶ به رابطه‌ی ۴۱ خواهیم رسید. ترم‌های $\bar{\Omega}^{*}$ از یک سری پیروی می‌کنند که با ضرب تابع وزنی $\left(1-\xi^2\right)^{2/3}$ و چندجمله‌ای گیگنباور[31] $\mathrm{C}_b^a(.)$ تعیین می‌شوند که a اندیس آن و b درجه چند جمله‌ای است (Abramowitz and Stegun, 1972; Andrews et al., 1999; Erdelyi, 1953; Szeg, 1939).

$$\bar{\Omega}_j^{*}=\left(1-\xi^2\right)\left(1-\xi^2\right)^{a-1/2}\mathrm{C}_{2j-2}^{a}\left(\xi\right),\quad j=1,2,... \tag{۴۷}$$

$$a-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\ \ \rightarrow\ \ a=\frac{7}{6}$$

توضیح اینکه چندجمله‌ای گیگنباور $\mathrm{C}_b^a\left(\xi\right)$ یک چند جمله اورتوگونال[۳۲] در دامنه $\left[-1,1\right]$ است که در نقطه $\xi=1$ برابر با صفر است و در $\xi=0$ به یک عدد محدود است. چند جمله‌ای لژاندر[۳۳] و چبیشف[34] حالت خاصی از چند جمله‌ای گیگنباور $\mathrm{C}_b^a(.)$ و همگی حالت خاصی از چند جمله‌ای ژاکوبی[۳۵] هستند.

حل تابع Π_0^{*} از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند:

$$\bar{\Omega}_0^{*}=\left(1-\xi^2\right)^{2/3},\ A_0=\sqrt{3},\ \ \Pi_0^{*}=\frac{1}{3\pi}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right){}_2\mathrm{F}_1\left(-\frac{1}{6},1;\frac{1}{2};\xi^2\right) \tag{۴۸}$$

$$\text{Or}\ \ \Pi_0^{*}=\frac{\xi}{3\sqrt{3}}\left(1-\xi^2\right)^{-1/3}\frac{1}{2\pi}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right){}_2\mathrm{F}_1\left(-\frac{1}{6},1;\frac{4}{3};1-\xi^2\right)$$

که در آن B تابع بتای اویلر[۳۶] و ${}_2\mathrm{F}_1$ تابع هیپرژئومتریک گوسی[۳۷] است. برای تمام جملات از حل عمومی Π_j^{*} از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود:

$$\Pi_j^{*}=\begin{cases}\frac{1}{3\pi}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right){}_2\mathrm{F}_1\left(-\frac{1}{6},1;\frac{1}{2};\xi^2\right), & j=0\\ \frac{10}{21\pi}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right){}_2\mathrm{F}_1\left(-\frac{7}{6},1;\frac{1}{2};\xi^2\right), & j=1\\ \frac{2j-1}{2\pi}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}-j,\frac{2}{3}+j\right)\left[\frac{5}{3}\xi^2\,{}_2\mathrm{F}_1\left(\frac{5}{6}-j,j;\frac{3}{2};\xi^2\right)\right. & \\ \left.-\frac{1}{2}\,{}_2\mathrm{F}_1\left(-\frac{1}{6}-j,j-1;\frac{1}{2};\xi^2\right)\right], & j>1\end{cases} \tag{۴۹}$$

لازم به‌ذکر است که تمام جملات فوق باید شرایط معادله‌ی ۳۸ را ارضا کند.

$$\int_0^1\frac{\Pi_j^{*}}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi=0,\ \ j=1,2,... \tag{۵۰}$$

مطابق با معادله‌ی پیوستگی ۳۷ حل عمومی برای نرخ جریان $\bar{\Psi}_j^{*}$ با انتگرال‌گیری از بازشدگی $\bar{\Omega}_j^{*}$ تعیین می‌شود.

$$\int_\xi^1\bar{\Omega}_j^{*}d\xi=\begin{cases}\frac{2}{7}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)-\xi\,{}_2\mathrm{F}_1\left(\frac{1}{2},-\frac{2}{3};\frac{3}{2};\xi^2\right), & j=0\\ \frac{20}{9}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)-\xi\,{}_2\mathrm{F}_1\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{3};\frac{3}{2};\xi^2\right), & j=1\\ -\frac{20}{247}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)+\frac{91}{114}\xi\left(1-\xi^2\right)^{8/3} & \\ +\frac{7}{9}\xi\,{}_2\mathrm{F}_1\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{3};\frac{3}{2};\xi^2\right), & j=2\\ \frac{91\left(1-\xi^2\right)^{8/3}}{2\left(12j-5\right)}\left[\frac{\mathrm{C}_{2j-3}^{19/6}\left(\xi\right)}{\left(j-1\right)\left(6j+7\right)}-\frac{\mathrm{C}_{2j-5}^{19/6}\left(\xi\right)}{\left(j-2\right)\left(6j+1\right)}\right], & j>2\end{cases} \tag{۵۱}$$

---

[31] Gegenbauer polynomials
[32] orthogonal polynomials
[33] Legendre polynomials
[34] Chebyshev polynomials
[35] Jacobi polynomials
[36] Euler's beta function
[37] Gauss' hypergeometric function

مطابق با شرط مرزی ۳۹ در محل تزریق ترک، $\xi = 0$، تغییرات فشار Π_j^* در آن باید منفی باشد، ولی مقدار تغییرات برابر با صفر است؛ بنابراین سری Π^* باید با یک تابع خاصی (Π^{**}) تکمیل شود تا شرایط مرزی ۳۸ و ۳۹ ارضا کند. ساده‌ترین تابع Π^{**} برای اینکه هردو شرایط را ارضا کند به‌صورت زیر است:

$$\Pi^{**} = 2 - \pi|\xi| \qquad (۵۲)$$

با جایگذاری رابطه‌ی فوق در معادله‌ی ۳۲ داریم:

$$\bar{\Omega}^{**} = 4\sqrt{1-\xi^2} + 2\xi^2 \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{1+\sqrt{1-\xi^2}}\right| \qquad (۵۳)$$

همچنین برای تعیین جواب خصوصی نرخ جریان $\bar{\Psi}^{**}$، رابطه‌ی فوق را در رابطه‌ی ۳۷ قرار می‌دهیم.

$$\bar{\Psi}^{**} = \frac{2}{3}\left(\pi - 4\xi\sqrt{1-\xi^2} - 2\arcsin\xi - \xi^3 \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{1+\sqrt{1-\xi^2}}\right| + \xi\bar{\Omega}^{**}\right) \qquad (۵۴)$$

لازم به ذکر است که حل خصوصی، تاثیر قابل اغماضی بر روی رفتار حدی نوک ترک دارد و این مهم با بسط تیلور تابع $\bar{\Omega}^{**}$ حول $\xi = 1$ مشخص می‌گردد.

$$\bar{\Omega}^{**} = \frac{16}{3}\sqrt{2}\left(1-\xi^2\right)^{3/2} - \frac{28}{15}\sqrt{2}\left(1-\xi^2\right)^{5/2} + O\left[\left(1-\xi^2\right)^{7/2}\right], \quad \xi \to 1 \qquad (۵۵)$$

در نهایت مطابق با رابطه‌ی ۴۰ می‌توان مقدار γ_{m0} را تعیین نمود.

$$\frac{1}{\gamma_{m0}^2} = 2\int_0^1 \bar{\Omega}_{m0}\, d\xi = \frac{4\pi}{3}B + 4\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\left[\frac{A_0}{7} + \frac{10}{13}\left(\frac{A_1}{7} - \frac{A_2}{19}\right)\right] \qquad (۵۶)$$

بقیه ترم‌ها این انتگرال($j > 2$) قابل صرف‌نظر کردن است.

ضرایب . A_j و B با بهینه و کمینه‌کردن اختلاف بین نرخ جریان محاسبه شده از رابطه‌ی ۴۵ به‌طور مستقیم و قانون پوازنی از رابطه‌ی ۳۵ به‌صورت غیرمستقیم تعیین می‌شوند. برای کمینه کردن از روش حداقل مربعات تابع استفاده می‌شود.

$$\Delta_{m0} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-\bar{\Omega}_{m0}^3\left(\xi_i\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\Pi_{m0}\left(\xi_i\right)}{\bar{\Psi}_{m0}\left(\xi_i\right)} - 1\right)^2 \qquad (۵۷)$$

که در آن ξ_i, $i = 1, 2, .., \mathrm{n}$ نقاطی در بازه $[0,1)$ است و n تعداد نقاط فرض شده در بازه اشاره شده است که در اینجا مقدار n برابر ۲۱ با فاصله‌های یکسان فرض شده است. برای روند حل اشاره شده در این مقیاس، برنامه‌ای تحت نرم‌افزار متمتیکا[۳۸] نوشته شده است. ضرایب با استفاده از روش BFGS [۳۹] (Broyden, 1970) محاسبه شد. برای همگرایی مورد نظر خطای کوچکی در نظر گرفته شد. تحلیل عددی تا زمانی ادامه می‌یابد که خطای مورد نظر ارضا شود. این خطا برابر با $\varepsilon = 10^{-7}$ در نظر گرفته شد.

$$\left|A_j^s - A_j^{s-1}\right| < \varepsilon, \quad j = 1, 2, 3, \ldots \qquad \left|B^s - B^{s-1}\right| < \varepsilon \qquad (۵۸)$$

که در آن s تعداد تکرار حل برای رسیدن به همگرایی است. تعداد جملات سری m در این برنامه از یک تا ۱۰ در نظر گرفته شد. در اینجا برای مثال میزان بازشدگی $\bar{\Omega}_{m0}$ و فشار Π_{m0} برای $m = 1$ آورده شد:

$$\bar{\Omega}_0^* = \left(1-\xi^2\right)^{2/3}, \quad A_0 = \sqrt{3}, \qquad (۵۹)$$

$$\bar{\Omega}_{m0} \approx 3^{1/2}\left(1-\xi^2\right)^{2/3} + A_1\left(1-\xi^2\right)^{5/3} + B\bar{\Omega}^{**}$$

$$\Pi_{m0} = B\Pi^{**} + \frac{1}{3\pi}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\left[\begin{array}{l} 3^{1/2}\ {}_2\mathrm{F}_1\left(-\frac{1}{6},1;\frac{1}{2};\xi^2\right) \\ +\frac{10}{7}A_1\ {}_2\mathrm{F}_1\left(-\frac{7}{6},1;\frac{1}{2};\xi^2\right) \end{array}\right]$$

که مقادیر A_1 و B در جدول ۱ آورده شده است. آداچی و دتورنی در سال ۲۰۰۲ از این روش برای تحلیل سیستم مشابه برای حالت سیال نیوتنی استفاده کردند. همچنین به‌طور مشابه این روش برای ترک شعاعی نیز به‌کار گرفته شد (Savitski and Detournay, 2002).

خلاصه‌ای از نتایج عددی در جدول ۱ برای مقادیر مختلفی از m آورده شده است.

---

[38] Mathematica, version 13.3.1.0

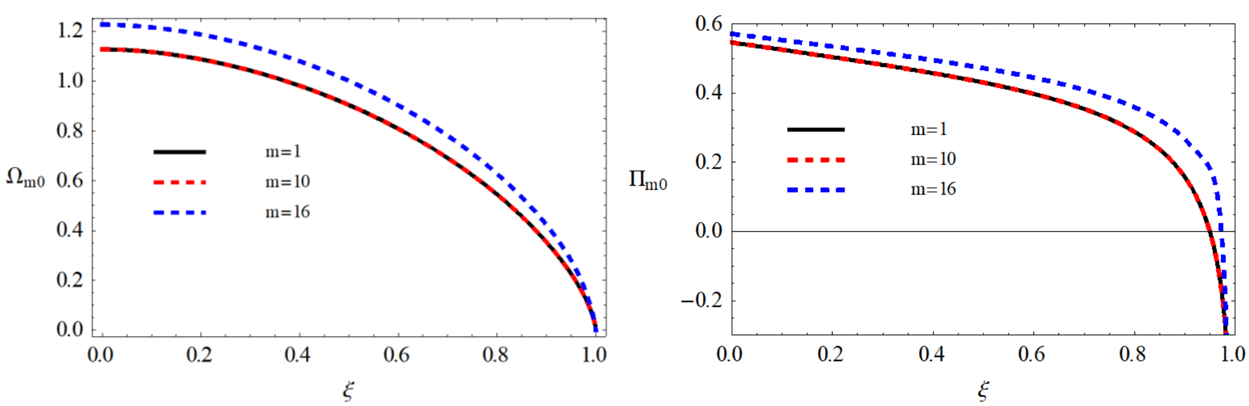
[39] Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno algorithm

جدول ۱- نتایج حل عددی در رژیم گرانروی برای ترک KGD: ضرایب سری، طول مقیاس شده، میزان بازشدگی و فشار در محل تزریق.

Table 1- The solution results in the viscosity scaling for KGD crack: series coefficients، scaled length، opening، and net pressure at the injection point.

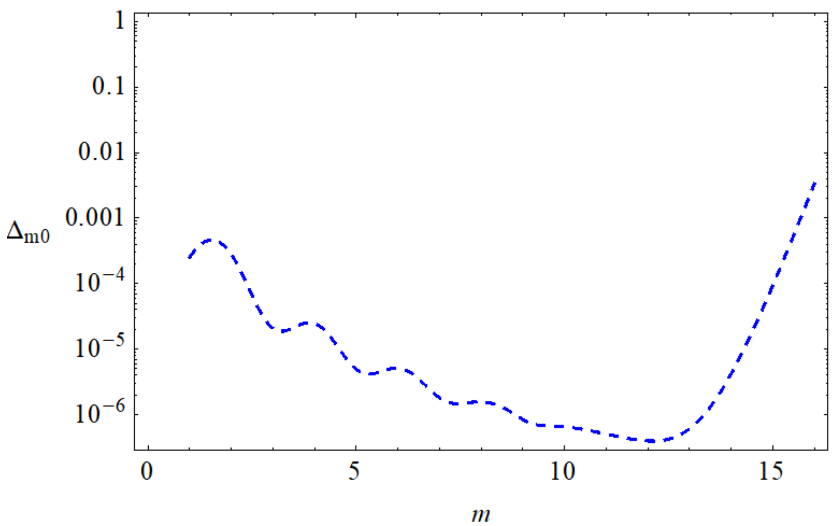
	$m=1$	$m=2$	$m=4$	$m=6$	$m=8$	$m=10$
$A_1\times10^1$	-1.5601	-1.5845	-1.7825	-1.8345	-1.8514	-1.8555
$A_2\times10^3$	-	-2.6420	-9.2796	-11.8789	-12.7768	-12.8768
$A_3\times10^3$	-	-	-2.6641	-4.4196	-5.1529	-5.2511
$A_4\times10^4$	-	-	-1.2475	-9.6589	-14.4180	-15.0248
$A_5\times10^4$	-	-	-	-2.8335	-5.6192	-5.9947
$A_6\times10^5$	-	-	-	-0.5353	-12.7056	-14.1101
$A_7\times10^5$	-	-	-	-	-3.0579	-3.0171
$A_8\times10^5$	-	-	-	-	0.7301	1.6843
$A_9\times10^5$	-	-	-	-	-	1.0776
$A_{10}\times10^5$	-	-	-	-	-	0.7013
$B\times10^2$	6.6322	6.5275	6.7631	6.8207	6.8416	0.6850
$\Omega_{m0}(0)$	1.1288	1.1279	1.1264	1.1261	1.1260	1.1260
$\Pi_{m0}(0)$	0.5469	0.5463	0.5453	0.5450	0.5450	0.5449
$\int_{-1}^{1}\bar{\Omega}_{m0}d\xi$	2.6332	2.6549	2.6451	2.6426	2.6420	2.6419
γ_{m0}	0.6162	0.6137	0.6149	0.6151	0.6152	0.6152
Δ_{m0}	2.51e-4	2.77e-4	2.45e-5	5.09e-6	1.56e-6	6.5e-7

همچنین شکل ۲ نشان می‌دهد که اختلاف چندانی با افزایش تعداد جملات سری تا جمله $m=10$ مشاهده نشد ولی تا حدودی این اختلافات $m>12$ افزایش می‌یابد. میزان تغییرات Δ_{m0} بر حسب تعداد چندجمله در شکل ۳ ترسیم شده است. با افزایش تعداد جملات سری، حل به روش BFGS تا حدودی وابسته به حدس اولیه برای ضرایب سری خواهد شد. بنابراین ممکن است افزایش جمله تا حدی خطا به محاسبات وارد نماید.



شکل ۲- تغییرات بازشدگی مقیاس شده Ω_{m0} و فشار سیال در سطوح ترک Π_{m0} در حالت رژیم گرانروی با سختی صفر برای ترک KGD.

Figure 2- Variations of scaled opening، Ω_{m0}، and fluid pressure at crack surfaces، Π_{m0}، in viscous-regime for KGD crack.



شکل ۳- میزان مجموع خطای مربعات کامل برحسب تعدادجمله‌ها از سری.

Figure 3- The computed amount of least square error according to the degrees of the considered series.

تحلیل ترک شعاعی یا سکه‌ای شکل

از روش مشابه اسپنس و شارپ در سال ۱۹۸۵ (Spence and Sharp, 1985)، برای حل مقیاس گرانروی برای ترک شعاعی استفاده می‌شود. در این روش فرض می‌شود که میزان بازشدگی $\bar{\Omega}_{m0}$، و فشار Π_{m0} به‌صورت زیر باشد.

$$\bar{\Omega}_{m0} \approx B\bar{\Omega}^{**}+\bar{\Omega}^{*}=B\bar{\Omega}^{**}+\sum_{j=0}^{m+1} C_j\bar{\Omega}_j^{*} \quad (۶۰)$$

$$\Pi_{m0} \approx B\Pi^{**}+\Pi^{*}=B\Pi^{**}+\sum_{i=0}^{m} A_i\Pi_i^{*} \quad (۶۱)$$

که در آن ترم‌های $\bar{\Omega}^{**}, \Pi^{**}$ جواب‌های خصوصی معادلات هستند و رفتار مناسبی از محیط را در محل تزریق ترک ارائه می‌دهند (Adachi and Detournay, 2002; Carbonell, 1996a). ترم‌های $\bar{\Omega}^{*}, \Pi^{*}$ جواب‌های عمومی معادلات هستند که رفتار نوک ترک را با توجه به روابط ۳۱ و ۳۲ انعکاس می‌دهند. A_j, C_j و B ضرایب مجهولی هستند که از جایگزینی جواب‌های فرض شده ۳۳، ۳۴ و ۳۵ در معادلات کشسانی و روانسازی تعیین می‌شوند.

با توجه به رابطه‌ی ۳۱ ترم‌های $\bar{\Omega}^{*}$ از یک سری پیروی می‌کنند که با ضرب تابع وزنی $(1-\xi)^{2/3}$ و چندجمله‌ای ژاکوبی[40] $G_i(p,q,\xi)$ تعیین می‌شوند (Abramowitz and Stegun, 1972).

$$\bar{\Omega}_i^{*}(\xi)=\frac{(1-\xi)^{2/3}}{\sqrt{\hbar_{i-1}\left(\frac{10}{3},2\right)}}G_{i-1}\left(\frac{10}{3},2,\xi\right), \quad (۶۲)$$

$$G_{i-1}(p,q,\xi)=\frac{\Gamma(q+i)}{\Gamma(p+2i)}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\frac{\Gamma(p+2i-j)}{\Gamma(q+i-j)}\xi^{i-j}$$

$$\hbar_i(p,q)\delta_{ij}=\int_0^1(1-\xi)^{p-q}\xi^{q-1}G_i(p,q,\xi)G_j(p,q,\xi)\,d\xi,$$

$$\hbar_i(p,q)=\frac{i!\,\Gamma(q+i)\Gamma(p+i)\Gamma(p-q+i+1)}{(p+2i)\left(\Gamma(p+2i)\right)^2}$$

توضیح اینکه چندجمله‌ای ژاکوبی $G_i(p,q,\xi)$ یک چند جمله اورتوگونال در دامنه $[0,1]$ است که در نقطه‌ی $\xi=1$ برابر با صفر است. همچنین مقادیر پارامترهای p و q به ترتیب 10.3 و 2 در نظر گرفته شد. تابع Π_j^{*} از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند:

$$\Pi_i^{*}(\xi)=\varpi_i-\bar{\Pi}_i^{*}(\xi),\ \bar{\Pi}_i^{*}(\xi)=\frac{(1-\xi)^{-1/3}}{\sqrt{\hbar_{i-1}\left(\frac{4}{3},2\right)}}G_{i-1}\left(\frac{4}{3},2,\xi\right), \quad (۶۳)$$

$$\varpi_i=\int_0^1\frac{\bar{\Pi}_i^{*}(\xi)}{\sqrt{(1-\xi^2)}}\xi\,d\xi$$

سری Π^{*} باید با یک تابع خاصی (Π^{**}) تکمیل شود تا شرایط مرزی ۳۸ و ۳۹ ارضا کند. ساده‌ترین تابع Π^{**} برای اینکه هردو شرایط را ارضا کند به‌صورت زیر است:

$$\Pi^{**}=-\ln\xi+\ln 2-1 \quad (۶۴)$$

با جایگذاری رابطه‌ی فوق در معادله‌های ۱-۳ داریم:

[40] Jacobi polynomials

$$\bar{\Omega}^{**} = \frac{8}{\pi}\left(1-\xi^2\right)^{1/2} - \frac{8}{\pi}\xi\cos^{-1}(\xi) \qquad (۶۵)$$

$\bar{\Omega}^{**}$ در شرایط سختی صفر و در نزدیکی نوک باید به‌صورت $(1-\xi)^{3/2}$ رفتار کند که در حقیقت با گرفتن بسط تیلور از تابع $\bar{\Omega}^{**}$ حول $\xi=1$، این امر میسر می‌شود.

$$\bar{\Omega}^{**} = \frac{2^{9/2}}{3\pi}(1-\xi)^{3/2} + \mathrm{O}\left[(1-\xi)^{5/2}\right], \quad \xi \to 1 \qquad (۶۶)$$

با استفاده از معادله‌ی کشسانی ۳۲ می‌توان رابطه‌ای بین ضرایب $\bar{\Omega}^{**}$ و Π^{*} تعیین کرد.

$$C_i = \sum_{j=1}^{m} L_{ij} A_j \qquad (۶۷)$$

که در آن L_{ij} برابر است با:

$$L_{ij} = \frac{8}{\pi}\int_0^1 \bar{\Omega}_i^{*}(\xi)\left[\int_0^1 G_1(\xi,\xi')\Pi_j^{*}(\xi')\xi' d\xi'\right]\xi d\xi \qquad (۶۸)$$

مقادیر مختلف L_{ij} برای $m=4$ در جدول ۲ نشان داده شد.

جدول ۲- مقادیر مختلف L_{ij} برای $m=4$.

Table 2- various values of L_{ij} for m=4.

L_{ij} $j\downarrow$ $i\rightarrow$	1	2	3	4
1	1.912	2.546	0.8201	0.6290
2	0.1982	-0.03698	0.8135	0.1219
3	0.003556	-0.08572	-0.04883	0.4586
4	0.003472	-0.007786	-0.08325	-0.02817
5	0.0009090	-0.005216	-0.006443	-0.07449

در نهایت ضرایب C_i, A_i و B با بهینه‌کردن از روش حداقل مربعات با جایگذاری سری در معادله‌ی پوازنی ۳۵ و پیوستگی ۳۷ تعیین می‌شوند.

$$\bar{\Psi}_{\mathrm{m0}}^{\mathrm{P}} = -\xi\left(B\bar{\Omega}^{**} + \sum_{j=0}^{m+1} C_j\bar{\Omega}_j^{*}\right)^3 \frac{\partial}{\partial\xi}\left(B\Pi^{**} + \sum_{i=0}^{m} A_i\Pi_i^{*}\right) \qquad (۶۹)$$

$$\bar{\Psi}_{\mathrm{m0}}^{\mathrm{C}} = \int_\xi^1\left(B\bar{\Omega}^{**} + \sum_{j=0}^{m+1} C_j\bar{\Omega}_j^{*}\right)\xi d\xi + \frac{4}{9}\xi^2\left(B\bar{\Omega}^{**} + \sum_{j=0}^{m+1} C_j\bar{\Omega}_j^{*}\right) \qquad (۷۰)$$

$\bar{\Psi}_{\mathrm{m0}}^{\mathrm{P}}$ و $\bar{\Psi}_{\mathrm{m0}}^{\mathrm{C}}$ به ترتیب نرخ جریان حاصل از معادله‌ی پوازنی و پیوستگی است. در واقع این دو باهم برابر هستند. تابع عملکرد آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta_{\mathrm{m0}} = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}}\left(\frac{\bar{\Psi}_{\mathrm{m0}}^{\mathrm{P}}}{\bar{\Psi}_{\mathrm{m0}}^{\mathrm{C}}} - 1\right)^2 \qquad (۷۱)$$

که در آن $\xi_i,\ i=1,2,..,\mathrm{n}$ نقاطی در بازه $[0,1)$ است و n تعداد نقاط فرض شده در بازه اشاره شده است که در اینجا مقدار n برابر ۱۰ با فاصله‌های یکسان فرض شده است.

تعداد جملات سری m در این برنامه از یک تا ۴ در نظر گرفته شد. در اینجا برای مثال میزان بازشدگی $\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}}$ و فشار Π_{m0} برای $m=1$ آورده شد.

$$\bar{\Omega}_{\mathrm{m0}} = \left[\frac{\sqrt{70}}{3}C_1 + \frac{4\sqrt{5}}{9}C_2(13\xi-6)\right](1-\xi)^{2/3} + \frac{8}{\pi}B\left[(1-\xi)^{1/2} - \xi\arccos(\xi)\right] \qquad (۷۲)$$

$$\Pi_{\mathrm{m0}} = A_1\left[\varpi_1 - \frac{2}{3}(1-\xi)^{-1/3}\right] - B\left(\ln\frac{\xi}{2} + 1\right)$$

که مقادیر C_2, C_1, A_1 و B در جدول ۳ آورده شده است.

خلاصه‌ای از نتایج عددی در جدول ۳ برای مقادیر مختلفی از m آورده شده است. همچنین جدول ۳ نشان می‌دهد که اختلاف چندانی با افزایش تعداد جملات سری تا جمله‌ی $m=4$ مشاهده نشد و دریافت می‌شود که این روش خوبی برای تخمین میزان بازشدگی و فشار در ترک هیدرولیکی حالت شعاعی است.

مقایسه‌ی بین ترک‌های دوبعدی کرنش صفحه‌ای و شعاعی

مقایسه‌ای بین فشار و بازشدگی مقیاس شده در ترک KGD با ترک سکه‌ای در شکل ۴ شده است. با توجه به این شکل می‌توان میزان بازشدگی مقیاس شده دو ترک را تقریبا باهم برابر فرض کرد ($\Omega_{\mathrm{m0}}^{\mathrm{Radial}} \simeq \Omega_{\mathrm{m0}}^{\mathrm{KGD}}$). اما با توجه به اینکه میزان بازشدگی از رابطه‌ی $w_{\mathrm{m0}} = \Omega_{\mathrm{m0}}\varepsilon_{\mathrm{m}}L_{\mathrm{m}}$ پیروی می‌کند بنابراین نسبت بازشدگی R_w به‌صورت زیر است:

$$\int_0^1 \frac{\Pi_j^{*}}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi = 0,\ j=1,2,...,\ \mathrm{R}_w = \frac{w_{\mathrm{m0}}^{\mathrm{KGD}}}{w_{\mathrm{m0}}^{\mathrm{Radial}}} = \frac{\left(\Omega_{\mathrm{m0}}\varepsilon_{\mathrm{m}}L_{\mathrm{m}}\right)^{\mathrm{KGD}}}{\left(\Omega_{\mathrm{m0}}\varepsilon_{\mathrm{m}}L_{\mathrm{m}}\right)^{\mathrm{Radial}}}, \qquad (۷۳)$$

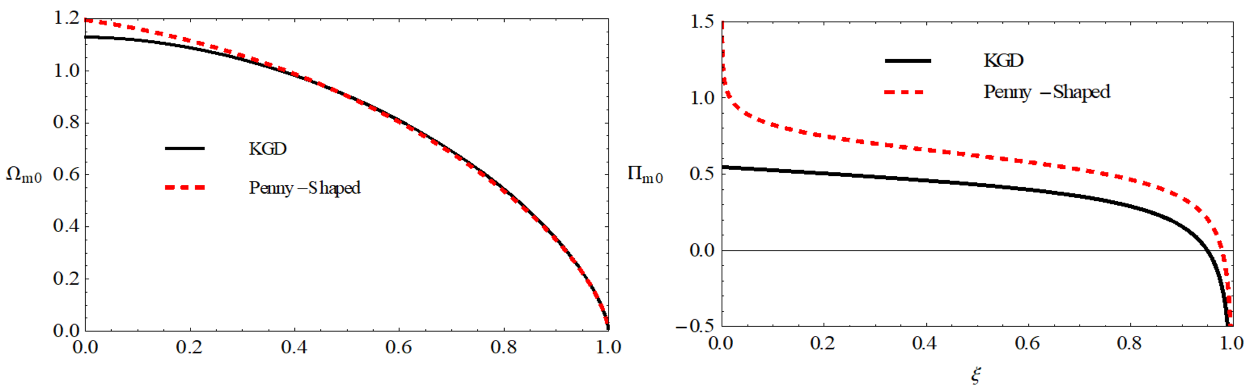
$$\xrightarrow[\varepsilon_{\mathrm{m}}^{\mathrm{Radial}}=\varepsilon_{\mathrm{m}}^{\mathrm{KGD}}]{\Omega_{\mathrm{m0}}^{\mathrm{Radial}}=\Omega_{\mathrm{m0}}^{\mathrm{KGD}}} \mathrm{R}_w = \frac{L_{\mathrm{m}}^{\mathrm{KGD}}}{L_{\mathrm{m}}^{\mathrm{Radial}}},\ \mathrm{R}_w = \left(\frac{E'Q_0^3t^4}{\mu'}\right)^{1/18} \propto t^{\frac{2}{9}},$$

جدول ۳- نتایج حل عددی در رژیم گرانروی برای ترک شعاعی: ضرایب سری، طول مقیاس شده، میزان بازشدگی و فشار در محل تزریق.

Table 3- The solution results in the viscosity regime for radial crack: series coefficients، scaled length، opening، and net pressure at the injection point.

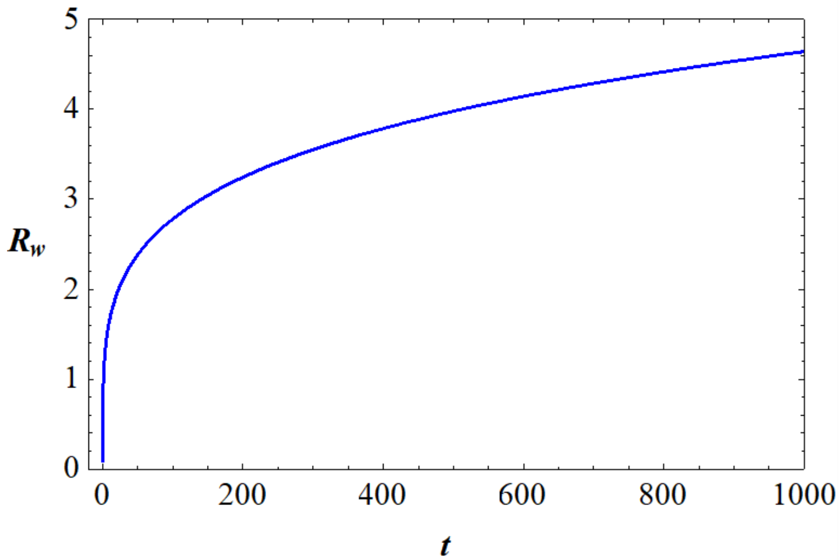
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$A_1 \times 10^1$	3.581	3.499	3.409	3.386
$A_2 \times 10^3$	-	5.442	9.805	11.33
$A_3 \times 10^3$	-	-	2.130	2.358
$A_4 \times 10^4$	-	-	-	1.646
$C_1 \times 10^1$	6.846	6.828	6.784	6.783
$C_2 \times 10^2$	7.098	6.916	6.894	6.864
$C_3 \times 10^4$	-	7.777	2.676	1.930
$C_4 \times 10^4$	-	-	9.299	8.867
$C_5 \times 10^4$	-	-	-	2.212
$B \times 10^2$	9.269	9.011	9.389	9.320
$\bar{\Omega}_{m0}(0)$	1.713	1.710	1.729	1.722
γ_{m0}	0.6955	0.6965	0.6974	0.6976

مطابق با شکل ۵، نسبت یا ضریب بازشدگی با زمان افزایش می‌یابد. به‌طور ضمنی استنباط می‌شود که در یک نرخ تزریق ثابت در ترک KGD میزان بازشدگی بیشتر است اما در زمان اولیه و زود هنگام میزان بازشدگی در ترک KGD نسبت به ترک شعاعی کمتر $(R_w<1)$ است. در شکل‌های ۶ و ۷ می‌توانید میزان بازشدگی ترک‌های KGD و شعاعی را در زمان‌های مختلف مشاهده کنید.



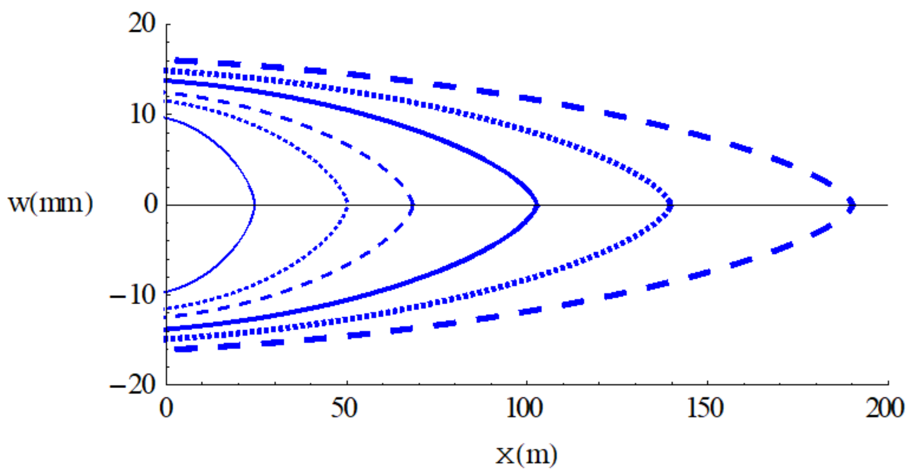
شکل ۴- تغییرات بازشدگی مقیاس شده Ω_{m0} و فشار سیال در سطوح ترک Π_{m0} در حالت رژیم گرانروی با سختی صفر برای دو ترک KGD و شعاعی یا سکه‌ای شکل.

Figure 4- Variations of scaled opening، Ω_{m0}، and fluid pressure at crack surfaces، Π_{m0}، in viscous regime with zero stiffness for KGD and penny-shape cracks.



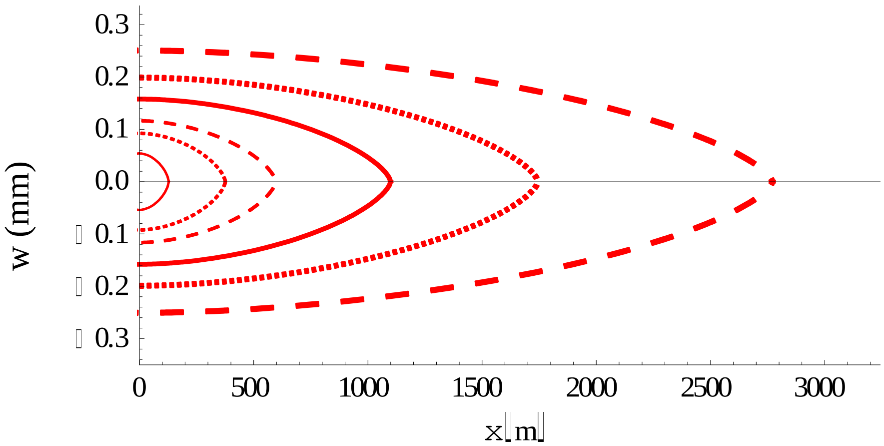
شکل ۵- تغییرات ضریب بازشدگی نسبت به زمان.

Figure 5- Time history of the opening ratio.



شکل ۶- تغییرات میزان بازشدگی در ترک دوبعدی KGD بر حسب مکان و در زمان‌های ۱۰۰، ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۲۵۰۰، ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ثانیه به ترتیب از بیضی گون کوچک تا بزرگ برای عرض واحد.

Figure 6- Variation of crack opening in the KGD crack for unit width versus location and different times of 100، 500، 1000، 2500، 5000، and 10000 seconds، respectively.



شکل ۷- تغییرات میزان بازشدگی در ترک شعاعی یا سکه‌ای شکل بر حسب مکان و در زمان‌های ۱۰۰، ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۲۵۰۰، ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ثانیه به ترتیب از بیضی گون کوچک تا بزرگ.

Figure 7- Variation of crack opening in the penny-shape crack for unit width versus location and different times of 100، 500، 1000، 2500، 5000، and 10000 seconds، respectively.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش ابتدا، صورت مسئله با توجه به فرضیات آن برای دو نوع از الگوهای هندسی ترک هیدرولیکی (صفحه‌ای و سکه‌ای شکل) تشریح شد. سپس معادلات حاکم بر این الگوها بیان شد. برای ساده‌تر شدن روند حل این معادلات حاکم با شرایط مرزی پیشرونده و متحرک، از ابزار مقیاس‌کردن استفاده شده است. سپس به حل معادلات حاکم بردو الگوی KGD و ترک سکه‌ای شکل در مقیاس‌گرانروی پرداخته شد. نتایج این پژوهش به‌شرح زیر می‌باشد:

روش‌های شبه‌تحلیلی ارائه شده برای حل معادله‌های همبسته، از دقت کافی و سرعت همگرایی بالا برخوردار است. با مقایسه‌ی بین بازشدگی مقیاس شده در ترک‌ها با هندسه‌های مختلف (KGD، ترک سکه‌ای شکل) نشان می‌دهد که تقریبا برای دو نوع ترک یکسان است. در حالی‌که میزان فشار مقیاس شده‌ی خالص در ترک صفحه‌ای کمتر از ترک سکه‌ای است.

در زمان‌های زودهنگام از فرآیند شکست هیدرولیکی، ترک‌های صفحه‌ای رشد سریعتری نسبت به ترک‌ها با هندسه‌ی سکه‌ای شکل دارند اما در زمان‌های بعدی رشد ترک‌های سکه‌ای شکل به‌شدت پیشی می‌گیرند.

میزان بازشدگی ترک صفحه‌ای از ترک سکه‌ای شکل بیشتر است و همین امر باعث شد که در رژیم گرانروی میزان رشد آن کاهش چشمگیری داشته باشد.

منابع

اصغری سراسکانرود، ص.، فرامرزی عوری، ب.، نوری، ت.، عابدینی، م.، ۱۴۰۲. شناسایی مناطق امیدبخش برای انرژی ژئوترمال با استفاده از داده‌های ماهواره‌ای در منطقه سبلان. هیدروژئولوژی.

عسگری، ع.، گلشنی، ع. ا.، ۱۳۹۴. تحلیل انتشار صفحه‌یی ترک هیدرولیکی در سنگ شکننده‌ی نفوذناپذیر با درنظرگرفتن اثر اینرسی سیال. مجله‌ی مهندسی عمران شریف، ۳۱.۲ (۳.۲): ۲۹-۲۳.

عسگری، ع.، گلشنی، ع. ا.، ۱۳۹۸. تحلیل مدل ریاضی انتشار ترک هیدرولیکی در محیط کشسان: رژیم سختی - گرانروی. مجله‌ی مهندسی عمران شریف، ۳۵.۲ (۲.۲): ۱۷-۲۸.

عسگری، ع.، گلشنی، ع. ا.، ۱۳۹۹. تحلیل رشد ترک هیدرولیکی در مقیاس سختی با درنظرگرفتن اثر اندرکنش فراسنج‌های ماند و گرانروی: ترم‌های مرتبۀ بالاتر. نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، ۵۲ (۲): ۴۶۹-۴۹۴.

عسگری، ع.، گلشنی، ع. ا.، ۱۴۰۰. برآورد اثر اندرکنش بین ترک‌های هیدرولیکی. نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، ۵۳ (۲): ۷۰۷-۷۲۲.

عسگری، ع.، گلشنی، ع. ا.، لکی روحانی، ع.، ۱۳۹۵. مدل ریاضی انتشار ترک هیدرولیکی در سنگ شکننده با در نظر گرفتن اثر اندرکنش (مضروبی) پارامترهای اینرسی و گرانروی. مجله‌ی مهندسی عمران شریف، ۳۲.۲ (۲.۱): ۵۹-۶۶.

علوی، س. غ.، ناصری، ح.، جمادی، م.، پرخیال، س.، ۱۳۹۸. هیدروژئوشیمی سیالات گرمابی مخازن ژئوترمال غرب سبلان- شمال‌غرب ایران. هیدروژئولوژی، ۴ (۱): ۸۰-۹۶.

Abe, H., Keer, L., Mura, T., 1976. Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks, 2. Journal of Geophysical Research, 81(35): 6292-6298.

Abou-Sayed, A., Andrews, D., Buhidma, I., 1989. Evaluation of oily waste injection below the permafrost in Prudhoe Bay field. SPE California Regional Meeting, Bakersfield, California.

Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1972. Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables. New York NY: Dover Publications Inc.

Adachi, J. and Detournay, E., 2002. Self similar solution of a plane strain fracture driven by a power law fluid. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 26(6): 579-604.

Adachi, J.I., 2001. Fluid-driven fracture in permeable rock. Ph.D. thesis, University of Minnesota.

Adachi, J.I., Detournay, E., Peirce, A. P., 2010. Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 47(4): 625-639.

Adachi, J.I. and Peirce, A. P., 2008. Asymptotic analysis of an elasticity equation for a finger-like hydraulic fracture. Journal of Elasticity, 90(1): 43-69.

Advani, S.H., Lee, T., Lee, J., 1990. Three-dimensional modeling of hydraulic fractures in layered media: part I-finite element formulations. Journal of energy resources technology, 112(1): 1-9.

Andrews, G.E., Askey, R., Roy, R., 1999. Special functions, Vol. 71, Cambridge UK: Cambridge university press.

Asgari, A., 2022. Extended power series solution for Perkins-Kern-Nordgren model of hydraulic fracture. AUT Journal of Civil Engineering, 6(4): 461-468.

Barenblatt, G.I., 1959. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 23(3): 622-636.

Barenblatt, G.I., 1996. Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics: dimensional analysis and intermediate asymptotics, Vol. 14, Cambridge University Press.

Batchelor, G., 1967. An Introduction to Fluid Dynamics Cambridge Univ. Press, Bentley House, London.

Bilby, B. and Eshelby, J., 1968. Fracture (Ed. H. Liebowitz), Vol. 1, In: Academic Press, New York.

Broyden, C.G., 1970. The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. general considerations. IMA Journal of Applied Mathematics, 6(1): 76-90.

Bunger, A.P. and Detournay, E., 2005, a. Asymptotic solution for a penny-shaped near-surface hydraulic fracture. Engineering fracture mechanics, 72(16): 2468-2486.

Bunger, A.P., Detournay, E., Jeffrey, R.G., 2005. Crack tip behavior in near-surface fluid-driven fracture experiments. Comptes Rendus Mecanique, 333(4): 299-304.

Bunger, A.P., Menand, T., Cruden, A., Zhang, X., Halls, H., 2013. Analytical predictions for a natural spacing within dyke swarms. Earth and Planetary Science Letters, 375: 270-279.

Carbonell, R.S., 1996a. Self-similar solution of a fluid-driven fracture. Ph.D. thesis, University of Minnesota.

Carbonell, R.S., 1996b. Self-similar solution of a fluid-driven fracture in a zerotoughness elastic solid. Proc .Roy. Soc. London.

Clifton, R.J. and Abou-Sayed, A.S., 1981. A variational approach to the prediction of the three-dimensional geometry of hydraulic fractures. SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symposium, Denver, Colorado.

Garagash, D., 2006. Transient solution for a plane-strain fracture driven by a shear-thinning, power-law fluid. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 30(14): 1439-1475.

Garagash, D. and Detournay, E., 2002. Viscosity-dominated regime of a fluid-driven fracture in an elastic medium. IUTAM Symposium on Analytical and Computational Fracture Mechanics of Non-Homogeneous Materials, Solid Mechanics and Its Applications, 97: 25–29.

Geertsma, J., 1989. Two-dimensional fracture propagation models. In Recent Advances in Hydraulic Fracturing. SPE Richardson, TX, 12: 81-94.

Geertsma, J. and De Klerk, F., 1969. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures. Journal of Petroleum Technology, 21(12): 1571-1581.

Geertsma, J. and Haafkens, R., 1979. A comparison of the theories for predicting width and extent of vertical hydraulically induced fractures. Journal of energy resources technology, 101(1): 8-19.

He, P., Lu, Z., Lu, Y., Huang, Y., Pan, L., Ouyang, L., and Zhou, J., 2023. Experimental study on fracture propagation and induced earthquake reduction by pulse hydraulic fracturing in shale reservoirs. Gas Science and Engineering, 110: 204908.

Hu, Z. and Wang, H., 2024. Feasibility study of energy storage using hydraulic fracturing in shale formations. Applied Energy, 354: part B, 122251.

Hui, G., Chen, Z.X., Lei, Z.D., Song, Z.J., Zhang, L.Y., Yu, X.R., Gu, F., 2023. A synthetical geoengineering approach to evaluate the largest hydraulic fracturing-induced earthquake in the East Shale Basin, Alberta. Petroleum Science, 20(1): 460-473.

Ingraffea, A. and Boone, T., 1988. Simulation of hydraulic fracture in poroelastic rock. Numerical Methods in Geomechanics (Innsbruck 1988), Balkema, Rotterdam: 95-105.

Ismail, A., and Azadbakht, S., 2024. A comprehensive review of numerical simulation methods for hydraulic fracturing. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 48(05): 1433-1459.

De Laguna, W., Tamura, T., Weeren, H., Struxness, E., McClain, W., Sexton, R., 1968. Engineering development of hydraulic fracturing as a method for permanent disposal of radioactive wastes. No. ORNL-4259., Oak Ridge National Lab. (ORNL), Oak Ridge, TN (United States).

Desroches, J., Detournay, E., Lenoach, B., Papanastasiou, P., Pearson, J., Thiercelin, M., and Cheng, A., 1994. The crack tip region in hydraulic fracturing. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 447(1929): 39-48.

Detournay, E., 2004. Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks. International Journal of Geomechanics, 4(1): 35-45.

Detournay, E., Cheng, A.D., Roegiers, J.C., McLennan, J., 1989. Poroelasticity considerations in in situ stress determination by hydraulic fracturing. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 26(6): 507-513.

Dontsov, E., 2016. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity and leak-off. Royal Society open science, 3(12): 160737.

Economides, M.J., Nolte, K. G., and Ahmed, U., 2000. Reservoir stimulation, Vol. 18, Wiley Chichester.

Erdelyi, A., 1953. Higher trascendental functions. Vol. 2, New York NY: McGraw-Hill.

Esfandiari, M., and Pak, A., 2023. XFEM modeling of the effect of in-situ stresses on hydraulic fracture characteristics and comparison with KGD and PKN models. Journal of Petroleum Exploration and Production Technology, 13(1): 185-201.

Frank, U. and Barkley, N., 1995. Remediation of low permeability subsurface formations by fracturing enhancement of soil vapor extraction. Journal of hazardous materials, 40(2): 191-201.

Garagash, D., 2000. Hydraulic fracture propagation in elastic rock with large toughness. 4th North American Rock Mechanics Symposium, Seattle, Washington.

Garagash, D., 2006. Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: Asymptotics of large toughness. Engineering fracture mechanics, 73(4): 456-481.

forced by faulting: An interpretation of hydraulic-fracture microseismicity, Carthage Cotton Valley gas field, Texas. Bulletin of the Seismological Society of America, 94(5): 1817-1830.

Sarvaramini, E. and Garagash, D., 2015. Breakdown of a Pressurized Fingerlike Crack in a Permeable Solid. Journal of Applied Mechanics, 82(6): 061006.

Savitski, A. and Detournay, E., 2001. Similarity solution of a penny-shaped fluid-driven fracture in a zero-toughness linear elastic solid. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics, 329(4): 255-262.

Savitski, A., and Detournay, E., 2002. Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions. International Journal of Solids and Structures, 39(26): 6311-6337.

Settari, A. and Cleary, M. P., 1986. Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry. SPE Production Engineering, 1(06): 449-466.

Shah, K., Carter, B. and Ingraffea, A., 1997. Hydraulic fracturing simulation in parallel computing environments. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts

Shan, K., Zheng, Y., Zhang, Y., Shan, Z., Li, Z., 2023. Effects of different fracture parameters on microseisms induced by hydraulic fracturing. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 82(6): 231.

Shapiro, R.A., 1954. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. New York: Ronald Press, 2(1).

Simonson, E., Abou-Sayed, A., Clifton, R., 1978. Containment of massive hydraulic fractures. Society of Petroleum Engineers Journal, 18(01): 27-32.

Sneddon, I. N., Lowengrub, M., Mathematician, P., 1969. Crack problems in the classical theory of elasticity. John Wiley and Sons New York, pp. 221.

Sousa, J., Carter, B., Ingraffea, A., 1993. Numerical simulation of 3D hydraulic fracture using Newtonian and power-law fluids. International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts, 30(07): 1265-1271.

Spence, D. Sharp, P., 1985. Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow. Proceedings of the

Khristianovic, S. and Zheltov, Y., 1955. Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids. Proc. 4th world petroleum congress, Rome, Italy.

Kovalyshen, Y. and Detournay, E., 2010. A reexamination of the classical PKN model of hydraulic fracture. Transport in porous media, 81(2): 317-339.

Lecampion, B. and Desroches, J., 2015. Simultaneous initiation and growth of multiple radial hydraulic fractures from a horizontal wellbore. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 82: 235-258.

Ma, Z.Q., Yin, X.Y., Zong, Z.Y., Tan, Y.Y., and Yang, Y.M., 2024. Analytical solution for the effective elastic properties of rocks with the tilted penny-shaped cracks in the transversely isotropic background. Petroleum Science, 21(1): 221-243.

Mack, M.G. and Warpinski, N.R., 2000. Mechanics of hydraulic fracturing. In: Economides, Nolte, editors. Reservoir stimulation, 3rd edition, Chichester, Wiley: Chapter 6.

Naceur, K.B. and Economides, M., 1989. Production from naturally fissured reservoirs intercepted by a vertical hydraulic fracture. SPE formation evaluation, 4(04): 550-558.

Nilson, R., 1981. Gas-driven fracture propagation. Journal of Applied Mechanics; (United States), 48(4): 757-762.

Nordgren, R., 1972. Propagation of a vertical hydraulic fracture. Society of Petroleum Engineers Journal, 12(04): 306-314.

Nygren, A. and Ghassemi, A., 2006. Poroelastic and thermoelastic effects of injection into a geothermal reservoir. Golden Rocks 2006, The 41st US Symposium on Rock Mechanics (USRMS), Colorado, ARMA-06-1053.

Ockendon, H., Ockendon, J.R., 1995. Viscous flow, Vol. 13, 1st edition, Cambridge University Press, pp 122.

Perkins, T. and Kern, L., 1961. Widths of hydraulic fractures. Journal of Petroleum Technology, 13(09): 937-949.

Rice, J.R., 1968. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. Fracture: an advanced treatise, 2: 191-311.

Rutledge, J., Phillips, W., Mayerhofer, M., 2004. Faulting induced by forced fluid injection and fluid flow

Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 400(1819): 289-313.

Szeg, G., 1939. Orthogonal polynomials, Vol. 23, New York NY: Colloquium Publications, American Mathematical Society, pp 432.

Warpinski, N. and Smith, M. B., 1989. Rock mechanics and fracture geometry. Recent Advances in Hydraulic Fracturing, 12: 57-80.

Xue, Y., Liu, S., Chai, J., Liu, J., Ranjith, P., Cai, C., Gao, F., Bai, X., 2023. Effect of water-cooling shock on fracture initiation and morphology of high-temperature granite: Application of hydraulic fracturing to enhanced geothermal systems. Applied Energy, 337: 120858.

Yu, H., Xu, W., Li, B., Huang, H., Micheal, M., Wang, Q., Huang, M., Meng, S., Liu, H., Wu, H., 2023. Hydraulic fracturing and enhanced recovery in shale reservoirs: theoretical analysis to engineering applications. Energy & Fuels, 37(14): 9956-9997.

YuP, Z. and Khristianovitch, S., 1955. On the mechanism of hydraulic fracture of an oil bearing stratum. Izvestiya Akademiia Nauk SSSR, Otd. Tekhn. Nauk, 5: 3-41.

Zhang, X., Detournay, E., Jeffrey, R., 2002. Propagation of a penny-shaped hydraulic fracture parallel to the free-surface of an elastic half-space. International journal of fracture, 115(2): 125-158.

Zhuang, X., Li, X., Zhou, S., 2023. Transverse penny-shaped hydraulic fracture propagation in naturally-layered rocks under stress boundaries: A 3D phase field modeling. Computers and Geotechnics, 155: 105205.