



مدل سازی عددی طرح تغذیه مصنوعی آبخوان آزاد با استفاده از روش تحلیل هم‌هندسی

فاطمه پورصالحی^۱، ابوالفضل اکبرپور^{۲*}، سید رضا هاشمی^۳

- ۱- دانشجوی دکتری مهندسی منابع آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه بیرجند، ایران
- ۲- استاد گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند، ایران
- ۳- دانشیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه بیرجند، ایران

* نویسنده مسئول: Akbarpour@birjand.ac.ir

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۴/۰۴

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۱۲

چکیده

در حال حاضر برداشت‌های بی‌رویه از منابع آب زیرزمینی، سبب افت تراز آبخوان‌ها به‌ویژه در مناطق خشک و نیمه‌خشک گردیده است. امروزه یکی از راهکارهای بهبود تراز آبخوان‌ها استفاده از طرح‌های تغذیه مصنوعی می‌باشد. این مطالعه با هدف شبیه‌سازی عددی طرح تغذیه مصنوعی دشت بیرجند از طریق احداث چاه‌های تزریق با استفاده از مدل عددی تحلیل هم‌هندسی انجام گردید. در این راستا ابتدا از یک مثال استاندارد با دو حلقه چاه برداشت با دبی ۱۱۴۲/۸۵ و ۱۴۲۸/۵۷ مترمکعب بر روز جهت شبیه‌سازی تراز سطح ایستابی در مدت ۲۱۰ روز استفاده گردید. پس از ارزیابی صحت مدل، تراز سطح ایستابی قبل از تزریق براساس شرایط موجود و پس از تزریق با استفاده از ۲۰ حلقه چاه تزریق با دبی ثابت ۷۶۳۸/۴۴ مترمکعب بر روز در ۱۲ گام زمانی ماهانه در آبخوان آزاد دشت بیرجند شبیه‌سازی شد. مقایسه‌ی نتایج مدل تحلیل هم‌هندسی و حل تحلیلی در آبخوان استاندارد با معیارهای ارزیابی برآورد شده معادل $ME=-0/0096$ ، $MAE=0/0111$ و $RMSE=0/0146$ و نیز در آبخوان آزاد دشت بیرجند با معیارهای ارزیابی $ME=-0/033$ ، $MAE=0/372$ و $RMSE=0/229$ بر صحت مدل در شبیه‌سازی تراز سطح ایستابی قبل از تزریق دلالت دارد. همچنین پس از شبیه‌سازی طرح احداث چاه‌های تزریق، با درون‌یابی تراز به‌دست‌آمده در نقاط کنترلی در محل ۱۰ حلقه چاه مشاهده‌ای موجود در آبخوان، نتایج در پایان دوره‌ی شبیه‌سازی افزایش تراز سطح ایستابی را حداکثر به میزان ۶۰/۵۳ سانتی‌متر در چاه مشاهده‌ای شماره ۲ و حداقل به میزان ۱/۲۵ سانتی‌متر در چاه مشاهده‌ای شماره ۹ نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل هم‌هندسی، چاه تزریق، شبیه‌سازی عددی، طرح تغذیه مصنوعی، منابع آب زیرزمینی.

مقدمه

می‌گردد؛ بنابراین، مناطق بسیاری مجموعه‌ای از پروژه‌های تغذیه‌ی مصنوعی آب زیرزمینی را اجرا کرده‌اند که نقش مهمی در کنترل این مشکلات ایفا نموده است (Zhang et al., 2015). چاه‌های تغذیه، که معمولاً به‌عنوان چاه‌های تزریق نامیده می‌شوند، عموماً جهت پر کردن مجدد آب‌های زیرزمینی در هنگامی که آبخوان عمیق بوده و توسط مواد با نفوذپذیری پایین از سطح جدا می‌گردد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. چاه‌ها همچنین برای تغذیه‌ی آبخوان‌های آزاد که زمین‌های

آب زیرزمینی منبع طبیعی مهم با ارزش اقتصادی و اهمیت اجتماعی بالا است که به‌عنوان یک منبع آب در دسترس برای استفاده‌های خانگی، کشاورزی و صنعتی مورد توجه قرار گرفته است. با این حال، در بسیاری از مناطق، بهره‌برداری بیش‌ازحد از آب زیرزمینی منجر به افزایش افت مداوم تراز سطح آب و نیز مسائل مکرر محیط زیست-زمین‌شناسی، مانند فرونشست زمین، ترک‌خوردگی و نفوذ آب دریا

روانابی که در حال حاضر به هدر می‌رود فراهم می‌نماید و در طولانی مدت به دوام آبخوان کمک خواهد کرد، قابل استفاده خواهد بود. همچنین عمر آبخوان به دلیل استفاده از چاه‌های تغذیه‌ی پیشنهادی حدود ۳ درصد افزایش می‌یابد و افت سطح آب در آبخوان به علت کاهش نرخ پمپاژ با استفاده از چاه تغذیه در مدت ۳۰ سال تقریباً ۴۱/۹ متر خواهد بود که حدود ۳۶٪ کمتر از وضعیت غالب منطقه خواهد بود. Karim and Abbdali (2017)، اثر تغذیه‌ی مصنوعی با استفاده از چاه تزریق را با استفاده از نرم‌افزار GMS تعیین نمودند. نتایج نشان داد که تغذیه در مرکز منطقه‌ی مورد مطالعه سبب افزایش سطح ایستابی تا ۲۰ متر پس از ۳۶۰ روز از تزریق می‌گردد. همچنین نتایج شبیه‌سازی اهمیت استفاده از تغذیه‌ی مصنوعی در بهبود سطح آب و جلوگیری از کاهش آن در آبخوان محصور را نشان می‌دهد. Kulkarni (2015)، با استفاده از دو روش عددی تفاضل محدود صریح (FDFLOW) و اجزای محدود گالرکین (FEFLOW) تغذیه‌ی آب زیرزمینی با استفاده از روش چاه تزریق را شبیه‌سازی نمودند. بررسی نتایج حاصل از تزریق نشان می‌دهد که در تراز سطح آب زیرزمینی در روش FDFLOW به میزان ۵/۳۰ متر و در روش FEFLOW به میزان ۵/۳۶ متر افزایش می‌یابد. Shi (2016) et al. اثر تغذیه مصنوعی به روش چاه تغذیه را بر کنترل نشست زمین، کیفیت آب زیرزمینی و ذخیره‌ی انرژی آبخوان در شانگهای چین بررسی نمودند. نتایج داده‌های تاریخی بلندمدت نشان داد که تغذیه‌ی مصنوعی نه تنها به افزایش سطح آب‌های زیرزمینی و بازگشت زمین از حالت فرونشست مفید است، بلکه منابع انرژی ارزان برای تولید صنعتی را فراهم می‌کند.

برای اولین بار، ورود تکنیک‌های طراحی به کمک رایانه به حوزه‌ی تحلیل سازه در سال ۱۹۹۸ توسط کیگان و همکاران صورت پذیرفت؛ که در آن به جای توابع شکل مورد استفاده در اجزاء محدود، از توابع پایه‌ی اسپیلاین استفاده شده بود. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع بی-اسپیلاین نسبی غیریکنواخت نریز که از توسعه‌ی توابع اسپیلاین به دست می‌آیند توسط Hughes et al. (2005) تکامل یافت و روش

قابل دسترس در آن‌ها محدود است، استفاده می‌شوند (Asano, 1985). با توجه به گرمایش جهانی، مدت کوتاهی وقت خواهیم داشت تا منابع آب زیرزمینی رو به اتمام مجدداً به طور مداوم با استفاده از روش‌های جدید تغذیه‌ی مصنوعی پر گردند. این مسئله توجه محققان در سراسر جهان را به استفاده از ابزار و انواع مختلف مدل‌های عددی جهت شبیه‌سازی فرآیندهای هیدرولوژیکی تغذیه‌ی آب زیرزمینی جلب نموده است (Kulkarni, 2015).

در راستای شبیه‌سازی فرآیندهای هیدرولوژیکی تغذیه‌ی آب زیرزمینی می‌توان به مطالعات کاردان مقدم و همکاران (۱۳۹۶)، رضایی و همکاران (۱۳۹۹)، تاج‌بخش و همکاران (۱۳۹۹)، جعفری و ارجمندشریف (۱۴۰۰) اشاره نمود.

همچنین در زمینه مدل‌سازی تغذیه مصنوعی به روش چاه تزریق، قبادیان و بهرامی (۱۳۹۵)، با استفاده از دو مدل عددی MODFLOW و MT3DMS به بررسی اثر سناریوهای کمی و کیفی بر آبخوان دشت خزل استان همدان پرداختند. نتایج کمی طرح تغذیه‌ی مصنوعی توسط ۳۱ چاه تزریق نشان داد که سطح آب زیرزمینی به میزان ۱۹ سانتی‌متر در فروردین‌ماه افزایش می‌یابد. دولابی و همکاران (۱۳۹۸)، با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین تغذیه‌ی مصنوعی آب زیرزمینی به روش چاه تزریق را برای یک مثال استاندارد شبیه‌سازی نمودند. نتایج نشان داد که میزان بالامدگی سطح آب ۱/۸ متر است و خطای کم این مدل بر دقت بالای آن دلالت دارد. پورصالحی و همکاران (۱۳۹۹)، با استفاده از مدل عددی MODFLOW اثر تغذیه مصنوعی به روش چاه تزریق را بر آبخوان آزاد دشت بیرجند بررسی نمودند. نتایج به دست آمده بر توانایی مدل در شبیه‌سازی تراز سطح ایستابی دلالت دارد. همچنین نتایج اجرای طرح تزریق به آبخوان به طور میانگین ۷۷ سانتی‌متر افزایش در تراز سطح ایستابی در چاه‌های مشاهده‌ای را نشان می‌دهد. همچنین Ghazaw (2014) et al. اثر چاه‌های تغذیه‌ی مصنوعی بر آب زیرزمینی را با استفاده از مدل MODFLOW برآورد نمودند. در این تحقیق رواناب حاصل از باران در شش حوضچه تخلیه شده و برای هر یک از شش استخر یک چاه تزریق جهت مدل‌سازی تغذیه به آب زیرزمینی صورت گرفته است. نتایج نشان داد که این تحقیق از نظر این که فرصت مناسبی جهت ذخیره و تغذیه‌ی

از مسائل جریان غیراشباع اجرا می‌شود درحالی‌که مرتبه‌ی بالاتر مدل اجزاء محدود به‌ویژه در مسائل با سطوح غیرخطی واگرا می‌گردد.

هدف از این مطالعه شبیه‌سازی عددی تراز سطح ایستایی آبخوان آزاد با استفاده از روش عددی تحلیل هم‌هندسی قبل و به‌ویژه پس از تزریق از طریق احداث چاه‌های تزریق می‌باشد.

مواد و روش‌ها

معادله‌ی عمومی آب زیرزمینی در آبخوان آزاد در حالت غیرماندگار

معادله عمومی جریان دوبعدی در محیط همگن، همسان

آبخوان آزاد به‌صورت رابطه‌ی (۱) تعریف می‌گردد:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y H \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{S_y \partial H}{\partial t} \pm R \quad (1)$$

در معادله‌ی فوق H تراز آبخوان، k_x و k_y هدایت هیدرولیکی آبخوان به ترتیب در جهت x و y ، S_y آبدهی ویژه و R مقدار تخلیه و یا تغذیه می‌باشد.

روش عددی تحلیل هم‌هندسی

سطح نربز از درجه‌ی p در راستای بردار گرهی $\Xi =$

$(\xi_0 = 0, \dots, \xi_{n+p+1} = 1)$ و درجه‌ی q در راستای بردار

گرهی $\eta = (\eta_0 = 0, \dots, \eta_{m+q+1} = 1)$ از رابطه‌ی زیر

به‌دست می‌آید (Peigl and Tiller, 1997).

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (2)$$

در روابط فوق $S(\xi, \eta)$ سطح نربز، $P_{i,j}$ $i=0, \dots, m$ و $j=0, \dots, n$

مختصات نقاط کنترل در دو جهت ξ و η و $R_{i,j}$ توابع پایه

دومتغیره نربز می‌باشد. بر اساس رابطه‌ی زیر تعریف می‌گردد:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (3)$$

که در آن $w_{i,j}$ وزن نقاط کنترلی در دو بعد، $N_{i,p}(\xi)$ و

$M_{j,q}(\eta)$ به ترتیب توابع پایه‌ی بی-اسپیلاین در جهت

بردارهای گرهی Ξ از درجه‌ی p و H از درجه‌ی q می‌باشند که

این توابع از روابط زیر حاصل می‌گردند ($M_{j,q}(\eta)$ به روش

مشابه برآورد می‌گردد):

تحلیل هم‌هندسی^۱ (IGA) نام گرفت. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایه اسپیلاین و نربز در تعریف دقیق منحنی‌ها، سطوح و احجام، همانند توابع شکل در روش اجزاء محدود، از آن‌ها برای درون‌یابی هم استفاده می‌شود. به‌طور خلاصه از مزایای روش تحلیل هم‌هندسی در مقایسه با دیگر روش‌های عددی می‌توان به مواردی چون امکان مدل‌سازی دقیق‌تر، دقت قابل‌ملاحظه در اقلان شرایط مرزی، عدم نیاز به شبکه‌بندی مجدد در مسائلی که مدل هندسی در طی فرآیند حل دچار تغییر می‌شود، کاهش قابل‌ملاحظه اندازه دستگاه معادلات، انعطاف‌پذیری و سادگی در مسائل بهبود شبکه و قابلیت استفاده از این روش در حل معادلات دیفرانسیلی که ضرایب آن‌ها خود تابعی متغیر می‌باشند، اشاره کرد (Kagan et al., 1998).

امروزه مطالعات متعددی در زمینه کاربرد روش تحلیل هم‌هندسی در مدل‌سازی آب زیرزمینی و مسائل مرتبط با آن انجام گردیده است. کلانتری و همکاران (۱۳۹۶)، با استفاده از این روش مدل جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد را توسعه دادند. نتایج نشان‌دهنده دقت بالای این مدل نسبت به مدل تفاضل محدود می‌باشد. (Bekele et al. (2014). با استفاده از روش تحلیل هم‌هندسی اجزاء محدود جریان داری تک‌فازی در محیط متخلخل دوبعدی را تحلیل نمودند. نتایج نشان داد که با توجه به پیوستگی مرتبه‌ی بالاتر توابع پایه‌ی بی-اسپیلاین، پیوستگی بهتری از گرادیان فشار مشاهده می‌شود. (Shahrokhbabadi et al. (2017). با استفاده از روش تحلیل هم‌هندسی راه‌حلی برای حل معادله‌ی ریچاردز برای جریان انتقالی در ناحیه‌ی غیراشباع خاک ارائه نمودند. نتایج نشان داد که روش تحلیل هم‌هندسی قادر است تغییرات فشار منفذی در محل اتصال خاک‌ها را با استفاده از درجه آزادی‌های کمتر و مرتبه‌های بالاتر از تقریب در مقایسه با روش اجزاء محدود مرسوم شبیه‌سازی نماید. (Shahrokhbabadi et al. (2017). با استفاده از روش تحلیل هم‌هندسی راه‌حل سریع همگرایی را جهت مدل‌سازی جریان انتقالی در خاک‌های اشباع بیان نمودند. نتایج نشان داد که مرتبه‌ی بالاتر نربز قادر به پیش‌بینی جبهه‌ی مرطوب در مسائل غیرخطی است. همچنین مدل تحلیل هم‌هندسی به طرز صحیحی در سرتاسر طیف وسیعی

¹ Isogeometric Analysis

روش تحلیل هم‌هندسی در آبخوان آزاد در مثال استاندارد

در این مثال استاندارد یک آبخوان آزاد با طول ۳۲۰۰ متر و عرض ۲۸۰۰ متر و با ضخامت متر ۱۰۰ b در نظر گرفته شد. تخلخل مؤثر و خصوصیات هیدرودینامیکی آبخوان شامل T و Sy به ترتیب معادل ۸۸۵/۷۱، n=۰/۳، T=۸۸۵/۷۱ مترمربع بر روز و Sy=۰/۱۵ به مدل وارد گردید. پس‌از آن مرز مدل در نواحی بالا و پایین آبخوان از نوع درישلت با تراز ثابت ۱۰۰ متر و در طرفین چپ و راست از نوع نیومن انتخاب گردید. همچنین مقادیر اولیه تراز سطح ایستابی معادل ۱۰۰ متر در نظر گرفته شد (Illangasekare and Doll, 1989; Kulkarni, 2015).

در تعریف مدل تحلیل هم‌هندسی در مثال استاندارد ابتدا مرتبه توابع پایه (برابر است با درجه‌ی توابع پایه به‌علاوه یک) تعیین و در هر دو جهت ξ و η برابر سه در نظر گرفته شد (البته با توجه به ساده بودن هندسه‌ی مسئله می‌توان درجه‌ی توابع پایه را برابر با یک در نظر گرفت. در صورت وجود انحنا در مسئله می‌توان مقادیر بیشتری برای آن اتخاذ نمود). همچنین تعداد اعضای بردار گرهی که بر اساس مجموع تعداد نقاط کنترلی و مرتبه‌ی توابع پایه به‌دست می‌آید، به‌صورت زیر در جهت ξ ۲۰ و در جهت η ۱۸ برآورد گردید:

$$k(\xi) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0,0,0,0, & \frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{5}{13}, \\ \frac{6}{13}, \frac{7}{13}, \frac{8}{13}, \frac{9}{13}, \frac{10}{13}, \frac{11}{13}, \frac{12}{13}, & 1,1,1,1 \end{array} \right\} \quad (10)$$

$$k(\eta) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0,0,0,0, & \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11}, \frac{6}{11}, \\ \frac{7}{11}, \frac{8}{11}, \frac{9}{11}, \frac{10}{11}, & 1,1,1,1 \end{array} \right\} \quad (11)$$

همچنین در آن تعداد نقاط کنترلی در جهت ξ و η به ترتیب معادل n=۱۷ و m=۱۵ نقطه با فاصله ۲۰۰ متر از یکدیگر تعریف گردید که در مجموع منجر به تولید ۲۵۵ نقطه‌ی کنترلی شد. با توجه به دوبعدی بودن جریان از انتگرال‌گیری گوس چهار نقطه استفاده شد (جدول ۱). در این مثال دو چاه بهره‌برداری در موقعیت (۱۴۰۰، ۱۴۰۰) و (۱۸۰۰، ۱۴۰۰) و یک چاه مشاهده‌ای موقعیت (۱۰۰۰، ۱۰۰۰) بر روی نقاط کنترلی با میزان برداشت $Q_{p1} = 1142/85 \text{ m}^3/\text{d}$ در چاه اول و $Q_{p2} = 1428/57 \text{ m}^3/\text{d}$ مترمکعب بر روز در چاه دوم در مدت ۲۱۰ تعریف شد (شکل ۱).

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{for } p = 0 \quad (4)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad \text{for } p \geq 1$$

مشتقات توابع پایه بی-اسپیلاین با استفاده از مرتبه‌ی پایین‌تر توابع پایه بی-اسپیلاین تعیین می‌گردد. برای یک‌چند جمله‌ای مشخص با مرتبه‌ی p و بردار گرهی X، مشتق تابع پایه نام به شرح زیر است (Shahrbanozadeh et al., 2014):

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (5)$$

مشتقات بالاتر با مشتق‌گیری پیوسته هر یک از طرفین معادله‌ی فوق به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \quad (6)$$

گسسته‌سازی معادله عمومی جریان در شرایط غیرماندگار

ماتریس سختی، بردار مجهولات و بردار نیرو پس از گسسته‌سازی رابطه‌ی (۱) جریان آب زیرزمینی در حالت دوبعدی و غیرماندگار در آبخوان آزاد با استفاده از روش حداقل باقی‌مانده‌های وزنی اجزاء محدود و انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء به ترتیب به‌صورت روابط (۷)، (۸) و (۹) خلاصه می‌گردد (کلانتری و همکاران، ۱۳۹۶):

$$[K] = k \left[\iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} H^n \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} H^n \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\Omega \right] + \iint_{\Omega} \varphi_i S_y \left(\frac{1}{\Delta t} \right) d\Omega \quad (7)$$

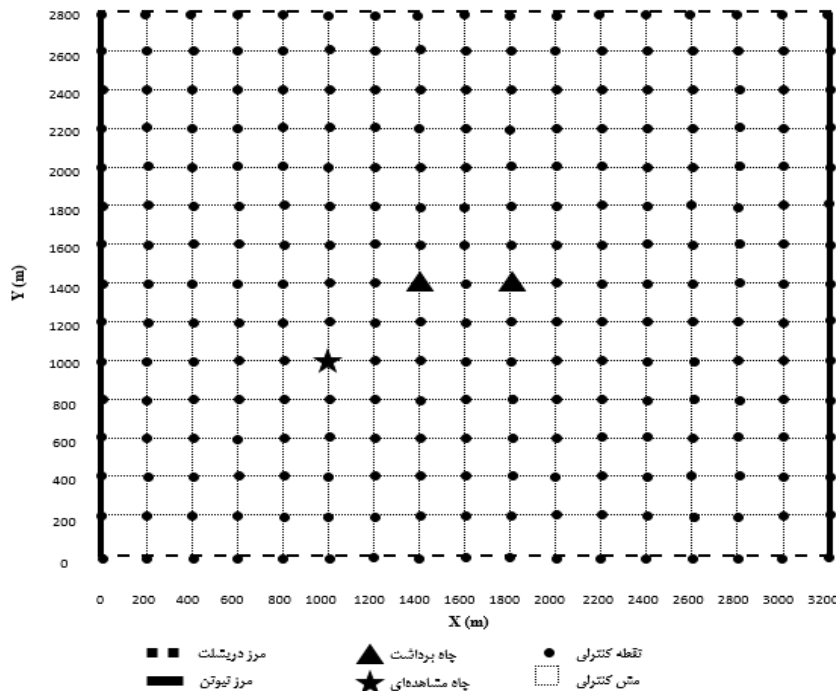
$$[U] = H^{n+1} \quad (8)$$

$$[F] = \iint_{\Omega} \varphi_i S_y \left(\frac{H^n}{\Delta t} \right) d\Omega - Q_K - \iint_{\Omega} \varphi_i q d\Omega \quad (9)$$

در روابط فوق [K] ماتریس سختی، [U] بردار مجهولات و بردار نیرو می‌باشد. φ_i ، Q_K و q به ترتیب توابع پایه، دبی متمرکز چاه kام و دبی گسترده مانند بارندگی یا تبخیر است.

جدول ۱- نقاط گوسی و ضرایب وزن مرتبط با آنها

نقاط گوسی	ضرایب وزن
-۰/۸۶۱۱۳۶۳۱۲	۰/۳۴۷۸۵۴۸۴۵
-۰/۳۳۹۹۸۱۰۴۴	۰/۶۵۸۱۴۵۱۵۵
۰/۳۳۹۹۸۱۰۴۴	۰/۶۵۸۱۴۵۱۵۵
۰/۸۶۱۱۳۶۳۱۲	۰/۳۴۷۸۵۴۸۴۵



شکل ۱- مکان قرارگیری چاه‌های بهره‌برداری و مشاهده‌ای بر روی نقاط کنترلی در آبخوان آزاد مثال استاندارد

$$MAE = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |h_0 - h_s|}{m \times n} \quad (13)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (h_0 - h_s)^2}{m \times n}} \quad (14)$$

در روابط فوق h_0 ، h_s ، n و m به ترتیب مقادیر تراز سطح ایستابی به صورت مشاهده‌ای و شبیه‌سازی شده توسط مدل، تعداد چاه‌های مشاهده‌ای و تعداد گام‌های زمانی را نشان می‌دهد.

روش تحلیل هم‌هندسی در آبخوان آزاد دشت بیرجند

دشت بیرجند در قسمت شمالی ارتفاعات باقران با مختصات تقریبی ۳۲ درجه و ۳۴ دقیقه تا ۳۳ درجه و ۸ دقیقه عرض جغرافیایی و ۵۸ درجه و ۴۱ دقیقه تا ۵۹ درجه و ۴۴ دقیقه طول جغرافیایی قرار گرفته است. حوضه آبریز بیرجند دارای وسعت ۳۱۵۵ کیلومتر مربع بوده، که ۱۸۴۵ کیلومتر دشت و بقیه را ارتفاعات تشکیل می‌دهد.

پس از تعریف مشخصات آبخوان، شبکه‌بندی و ایجاد نقاط کنترلی و محاسبه‌ی ماتریس سختی و بردار نیرو، تراز سطح ایستابی برآورد گردید. پس از اجرای مدل جهت اعتبارسنجی مدل، تراز سطح ایستابی شبیه‌سازی شده و نیز تراز سطح ایستابی محاسبه شده با روش حل تحلیلی با استفاده از معیارهای ارزیابی با یکدیگر مقایسه گردیدند. معیارهای ارزیابی ME ، MAE و $RMSE$ که به ترتیب میانگین خطا، میانگین قدر مطلق خطا و جذر میانگین مربعات خطای دو پارامتر تراز سطح ایستابی مشاهده‌ای و تراز سطح ایستابی شبیه‌سازی شده را نشان می‌دهند، با استفاده از روابط زیر برآورد می‌گردند:

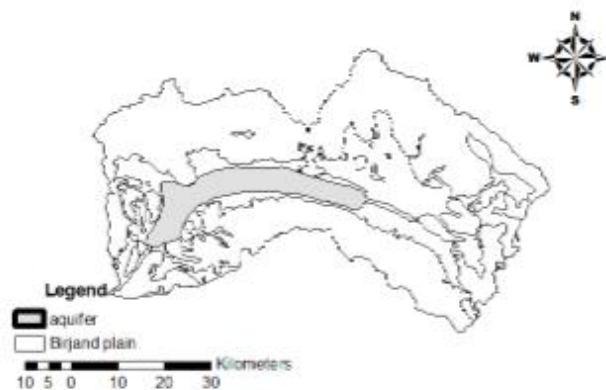
معیارهای ارزیابی در شرایط غیرماندگار (Sadeghi-tabas et al., 2016):

$$ME = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n h_0 - h_s}{m \times n} \quad (12)$$

این دشت حالت کشیده داشته و تمامی پیرامون آن را ارتفاعات و بخش مرکزی را آبخوان آبرفتی تشکیل می‌دهد. دشت بیرجند طبق طبقه‌بندی‌های اقلیمی جز مناطق خشک محسوب می‌شود. از نظر توپوگرافی حداکثر ارتفاع حوضه از سطح دریا ۲۷۸۷ متر در ارتفاعات شمالی منطقه (کوه بند دره) و حداقل ارتفاع نیز ۱۱۸۰ متر در خروجی دشت (منطقه فدشک) می‌باشد (همراز و همکاران، ۱۳۹۴). آبخوان دشت بیرجند از نوع آزاد و ناهمگن است که دارای متوسط ضخامت اشباع ۳۰ متر و مساحتی معادل ۲۶۵ کیلومتر مربع می‌باشد.



(الف)



(ب)

شکل ۲- موقعیت جغرافیایی دشت بیرجند (محتشمی و همکاران، ۱۳۹۶)

مشخصی از این پارامترها را دارا می‌باشد (فرپور، ۱۳۹۵). همچنین شرایط مرزی آبخوان آزاد دشت بیرجند به صورت هد ثابت (دریشت) در نظر گرفته شد. در آبخوان آزاد دشت بیرجند جهت افزایش دقت محاسبات عددی مرتبه‌ی توابع پایه در جهت ξ برابر $p=4$ و در جهت η برابر $q=3$ در نظر گرفته شد. بردار گرهی نیز به صورت زیر برآورد گردید: (در صورت استفاده از درجه به جای مرتبه، تعداد اعضای بردار گرهی از معادله‌ی $n+p+1$ به دست می‌آید).

در حال حاضر در این آبخوان ۱۹۰ حلقه چاه برداشت و ۱۰ حلقه چاه مشاهده‌ای موجود است که میزان تخلیه از آبخوان بر اساس برداشت از چاه‌های پمپاژ در واحد زمان برآورد می‌گردد. همچنین با توجه به بارندگی کم در این منطقه، میزان تغذیه با توجه به اطلاعات به دست آمده از ایستگاه باران‌سنجی دشت بیرجند معادل $0/000727$ متر بر روز تعیین شد (کلانتری و همکاران، ۱۳۹۶). لایه‌ی اطلاعات هدایت هیدرولیکی و ضریب آبدهی ویژه آبخوان به چندین تیسن تقسیم‌بندی شده است که هر تیسن در هر لایه اطلاعات

سال به آبخوان وارد گردید. در این تحقیق با فرض اینکه آب عاری از مواد جامد معلق باشد (با نصب حوضچه‌های رسوب‌گیر قبل از تزریق) و نیز از اختلاط هوا با آب در طی فرآیند تزریق جلوگیری شود (با تزریق آب در داخل لوله‌ی مشبک که انتهای آن در زیر سطح ایستابی قرار گرفته و به‌صورت مستغرق می‌باشد)، از محدودیت‌های کیفی صرف‌نظر می‌گردد.

نتایج و بحث

اعتبارسنجی مدل عددی تحلیل هم‌هندسی

نتایج اعتبارسنجی مدل عددی تحلیل هم‌هندسی در مثال استاندارد

در این بخش نتایج حاصل از مثال استاندارد با نتایج حل تحلیلی، مدل‌های عددی FE و FD در مطالعات Kulkarni (2015) و Illangasekare and Doll (1989) مقایسه گردید. نتایج حل تحلیلی نشان می‌دهد که در مدت ۲۱۰ روز برداشت از آبخوان، تراز سطح ایستابی در مکان چاه مشاهده‌ای به میزان ۴۲/۵ سانتی‌متر افت می‌کند و این پارامتر در حل عددی تحلیل هم‌هندسی در شرایط مشابه حل تحلیلی در مثال استاندارد معادل ۳۹/۹۰ برآورد گردید. بررسی میزان افت تراز سطح ایستابی که در مدل‌های FE و FD در پایان روز ۲۱۰م به ترتیب معادل ۳۹ و ۳۸ سانتی‌متر برآورد گردیده است نشان می‌دهد که مدل عددی تحلیل هم‌هندسی در جهت برآورد میزان افت تراز سطح ایستابی در اثر احداث دو چاه برداشت نسبت به سایر مدل‌های ذکر شده از تطابق بیشتری با حل تحلیلی برخوردار است. جدول ۲ نشان‌دهنده‌ی مقادیر معیارهای ارزیابی جهت بررسی سه مدل عددی FE، FD و تحلیل هم‌هندسی می‌باشد. از بررسی نتایج معیارهای ارزیابی نیز می‌توان دریافت که روش تحلیل هم‌هندسی در شبیه‌سازی سطح ایستابی آبخوان خطای کم‌تری نسبت به دو مدل اجزاء محدود و تفاضل محدود را نشان می‌دهد.

$$k(\xi) = \begin{pmatrix} 0,0,0,0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \\ 3, 3, 3, 4, 4, 4 \\ \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1, 1, 1, 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$k(\eta) = \left\{ 0,0,0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1 \right\} \quad (16)$$

تعداد نقاط کنترلی در مدل در جهت x برابر با ۱۶ و در جهت y برابر با ۷ تعریف و مجموعاً ۱۱۲ نقطه‌ی کنترلی ایجاد شد که جهت ایجاد هندسه‌ی دقیق‌تر تعداد نقاط کنترلی با استفاده از تکنیک افزودن گره به ۱۲۷۴ نقطه رسید که از این تعداد ۴۹ نقطه در جهت x و ۲۶ نقطه در جهت y می‌باشد: با فرض $\xi \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ و اضافه نمودن آن به ξ ، معادل $Q_{i,r}$ آمین نقطه‌ی کنترل جدید در ξ آمین مرحله‌ی افزودن گره می‌باشد و از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد (Peigl and Tiller, 1997):

$$Q_{i,r} = \alpha_i Q_{i,r-1} + (1 - \alpha_i) Q_{i-1,r-1} \quad (17)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & i \leq k - p + r - 1 \\ \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p-r+1} - \xi_i} & k - p + r \leq i \leq k - s \\ 1 & i \geq k - s + 1 \end{cases}$$

در رابطه فوق k اندیس بازه‌ی گره‌ی اضافه‌شده، p مرتبه‌ی توابع پایه و s تعداد تکراری است که گره جدید به بردار گره‌ی اضافه می‌گردد.

در آبخوان دشت بیرجند نیز از انتگرال‌گیری گوس چهار نقطه استفاده شد (جدول ۱). در انتها با استفاده از روابط ماتریس سختی و بردار نیرو و تعیین مقادیر آن‌ها، مقدار مجهول و یا همان تراز سطح ایستابی آبخوان آزاد دشت بیرجند در حالت غیرماندگار تعیین و با استفاده از معیارهای ارزیابی (روابط ۱۲-۱۴) با تراز واقعی آبخوان مقایسه گردید. پس از حصول اطمینان از صحت مدل، با انتخاب ۲۰ حلقه چاه بر روی نقاط کنترلی که در مناطق نفوذپذیر دشت واقع شده‌اند، دبی معادل ۷۶۳۸/۴۴ مترمکعب بر روز به ازای هر چاه در مدت‌زمان یک

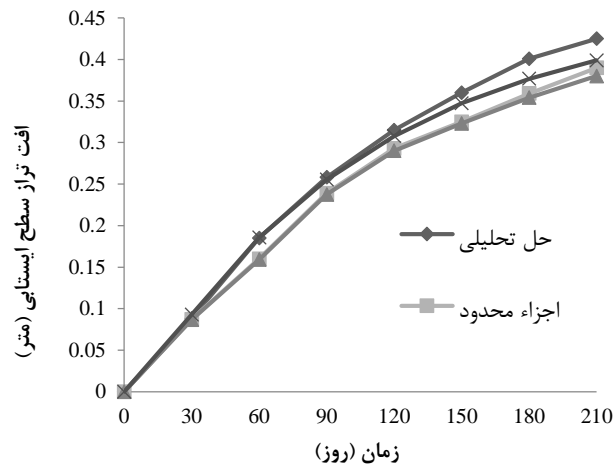
جدول ۲- محاسبه‌ی خطاهای میانگین، میانگین مطلق و جذر میانگین مربعات در آبخوان استاندارد (متر)

معیارهای ارزیابی (متر)	*مدل FD	*مدل FE	مدل IGA
ME	-۰/۰۲۸۸	-۰/۰۲۵۶	-۰/۰۰۹۶
MAE	۰/۰۲۸۸	۰/۰۲۵۶	۰/۰۱۱۱
RMSE	۰/۰۳۲۳	۰/۰۲۸۵	۰/۰۱۴۶

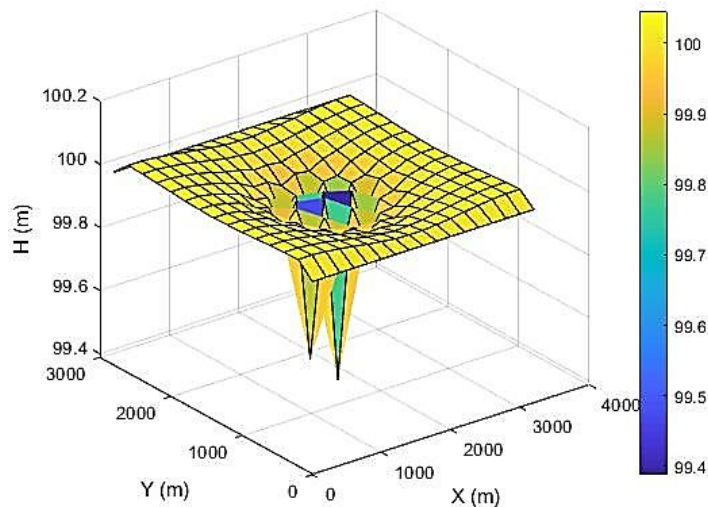
* نتایج حل تحلیلی، مدل FE و مدل FD از مقالات Illangasekare and Doll (1989) و نیز Kulkarni (2015) استخراج شده است.

مدل تحلیل هم‌هندسی در نمایش روند افت تراز آبخوان نزدیک‌ترین جواب به حل تحلیلی را ارائه می‌دهد. شکل ۴ تراز سطح ایستابی شبیه‌سازی شده را نشان می‌دهد.

شکل ۳ افت تراز سطح ایستابی محاسبه شده با روش‌های حل تحلیلی، اجزاء محدود، تفاضل محدود و تحلیل هم‌هندسی را نشان می‌دهد. نتایج به دست آمده از مقایسه‌ی نمودار افت محاسبه شده با چهار روش فوق نشان‌دهنده‌ی این است که



شکل ۳- مقایسه افت تراز سطح ایستابی محاسبه شده با روش‌های حل تحلیلی، اجزاء محدود، تفاضل محدود و تحلیل هم‌هندسی در آبخوان استاندارد



شکل ۴- شبیه‌سازی تراز سطح ایستابی با استفاده از مدل تحلیل هم‌هندسی در آبخوان استاندارد

به دست آمده از مدل تحلیل هم‌هندسی قابل قبول می‌باشد. بررسی تراز آبخوان در چاه‌های مشاهده‌ای نیز اختلاف ناچیزی بین حالت مشاهداتی و شبیه‌سازی شده را نشان می‌دهد که این امر بر توانایی مدل تحلیل هم‌هندسی در شبیه‌سازی تراز سطح ایستابی دلالت دارد. همچنین مقایسه‌ی نتایج شبیه‌سازی تراز سطح ایستابی در تحقیق حاضر با نتایج کلانتری و همکاران (۱۳۹۶) با معیارهای ارزیابی $ME=0.355$

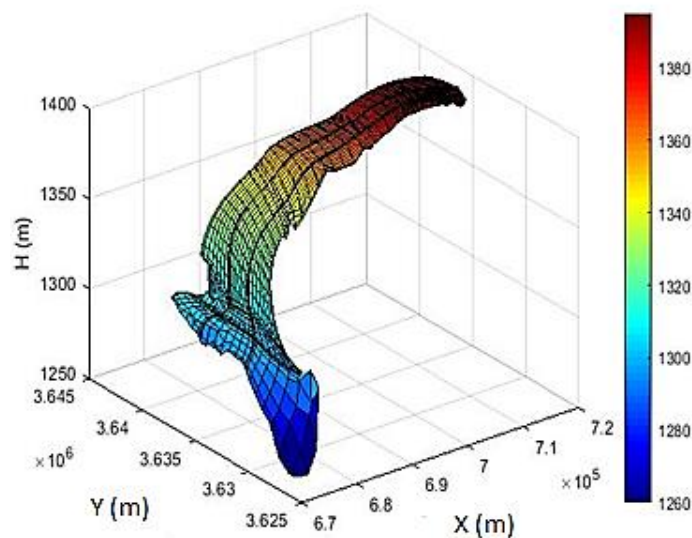
نتایج اعتبارسنجی مدل عددی تحلیل هم‌هندسی در آبخوان دشت بیرجند

جدول ۳ نتایج به دست آمده از معیارهای ارزیابی در شرایط غیرماندگار را نشان می‌دهد؛ بنابراین بر اساس این قاعده که اگر RMSE محاسبه شده در بازه $\pm 1/9$ قرار بگیرد، صحت شبیه‌سازی تأیید می‌گردد (Anderson et al., 2015)، نتایج

هم‌هندسی در شبیه‌سازی جریان آب زیرزمینی تأکید می‌شود. به‌دلیل نتایج شبیه‌سازی (که به سبب اعمال تغییرات در کد عددی حاصل شده است) و نیز کارایی بالای مدل عددی تحلیل هم‌هندسی در شرایط غیر ماندگار بر شکل ۵ مدل سه‌بعدی تراز سطح ایستابی شبیه‌سازی شده در حالت غیر ماندگار را نشان می‌دهد.

جدول ۳- محاسبه‌ی خطاهای میانگین، میانگین مطلق و جذر میانگین مربعات در آبخوان دشت بیرجند (متر)

مدل IGA	معیارهای ارزیابی (متر)
-۰/۰۳۳	ME
۰/۳۷۲	MAE
۰/۲۲۹	RMSE



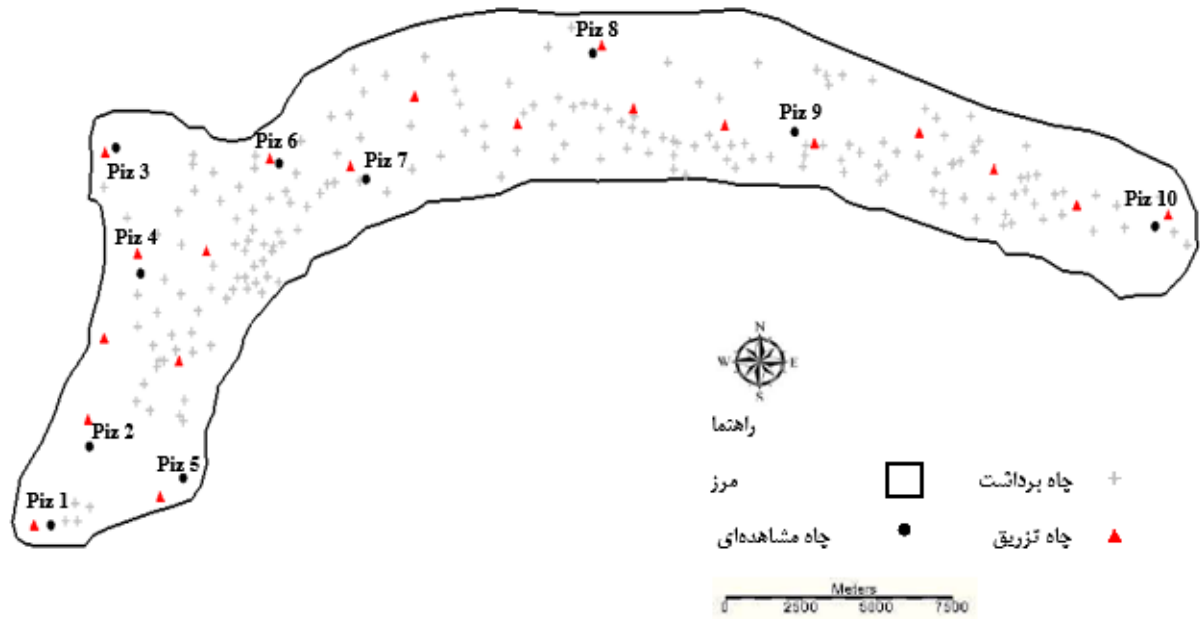
شکل ۵- تراز سطح ایستابی شبیه‌سازی شده با استفاده از روش تحلیل هم‌هندسی در آبخوان آزاد دشت بیرجند

نتایج تغذیه‌ی مصنوعی به روش چاه تزریق

هم‌هندسی در شرایط قبل و پس از تزریق را در هر یک از چاه‌های مشاهده‌ای در مدت‌زمان شبیه‌سازی نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که تزریق آب به آبخوان اثر بیشتری بر تراز سطح ایستابی چاه‌های مشاهده‌ای شماره ۱، ۲، ۶ و ۸ و نیز اثر ناچیزی بر تراز سطح ایستابی چاه‌های مشاهده‌ای شماره ۷ و ۹ دارد که از این میان بیشترین اثر تزریق بر چاه مشاهده‌ای شماره ۲ به میزان ۶۰/۳۴ سانتی‌متر می‌باشد.

پس از شبیه‌سازی تراز آبخوان، جهت ارزیابی اثر چاه‌های تزریق بر بالا آمدن تراز سطح ایستابی از ۲۰ حلقه چاه با دبی ۷۶۳۸/۴۴ مترمکعب بر روز استفاده گردید که پس از قرارگیری چاه‌ها در محدوده‌ی نفوذپذیر آبخوان عمل تزریق به آبخوان در مدت ۱۲ ماه انجام شد. شکل ۶ مکان قرارگیری چاه‌های تزریق را نشان می‌دهد.

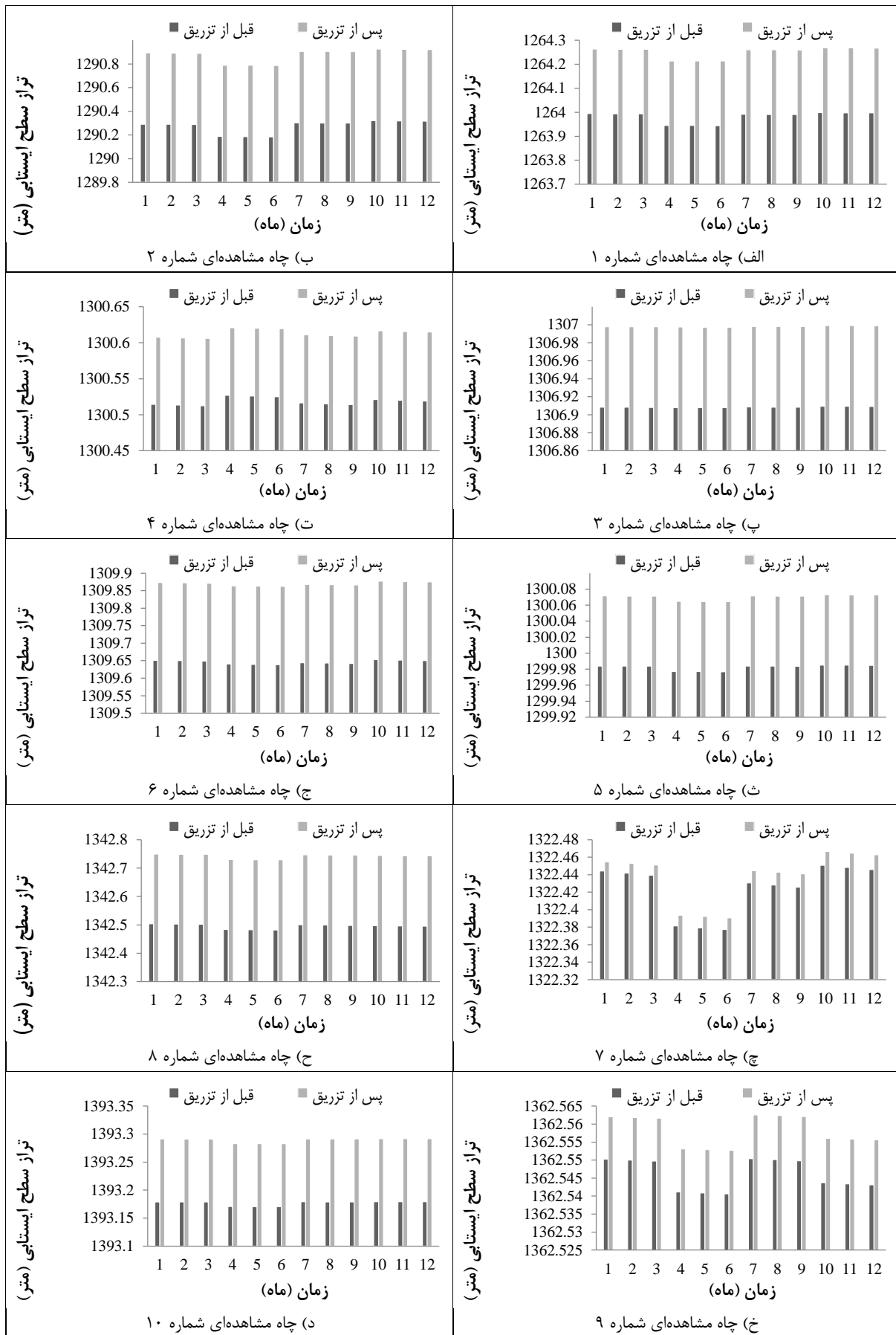
جدول ۴ مقایسه‌ی تراز سطح ایستابی قبل و پس‌از این تزریق و شکل ۷ تراز شبیه‌سازی شده با استفاده از مدل عددی تحلیل



شکل ۶- موقعیت مکانی در نظر گرفته شده جهت احداث چاه‌های تزریق در آبخوان آزاد دشت بیرجند

جدول ۴- تراز سطح ایستابی آبخوان دشت بیرجند قبل و پس از تزریق در پایان دوره‌ی شبیه‌سازی (ماه دوازدهم)

شماره چاه مشاهده‌ای	X (متر)	Y (متر)	تراز سطح ایستابی شبیه‌سازی شده قبل از تزریق (متر)	تراز سطح ایستابی شبیه‌سازی شده پس از تزریق (متر)	افزایش تراز سطح ایستابی (سانتی‌متر)
۱	۶۷۲۰۷۶/۹	۳۶۲۶۵۰۰	۱۲۶۴	۱۲۶۴/۲۷	۲۷
۲	۶۷۳۶۱۶/۷	۳۶۲۹۰۰۰	۱۲۹۰/۳۲	۱۲۹۰/۹۲	۶۰/۵۳
۳	۶۷۴۶۷۰/۸	۳۶۳۸۵۰۰	۱۳۰۶/۹۱	۱۳۰۷	۸/۹۶۷
۴	۶۷۵۶۵۹/۳	۳۶۳۴۵۰۰	۱۳۰۰/۵۲	۱۳۰۰/۶۱	۹/۵۸۳
۵	۶۷۷۳۵۸/۱	۳۶۲۸۰۰۰	۱۲۹۹/۹۸	۱۳۰۰/۰۷	۸/۷۸۷
۶	۶۸۱۱۹۱/۵	۳۶۳۸۰۰۰	۱۳۰۹/۶۵	۱۳۰۹/۸۸	۲۲/۴۹
۷	۶۸۴۶۵۹/۶	۳۶۳۷۵۰۰	۱۳۲۲/۴۵	۱۳۲۲/۴۶	۱/۶۹۶
۸	۶۹۳۷۱۶/۳	۳۶۴۱۵۰۰	۱۳۴۲/۵۰	۱۳۴۲/۷۴	۲۴/۷۹
۹	۷۰۱۷۷۵/۴	۳۶۳۹۰۰۰	۱۳۶۲/۵۴	۱۳۶۲/۵۶	۱/۲۵
۱۰	۷۱۶۱۶۷/۱	۳۶۳۶۰۰۰	۱۳۹۳/۱۸	۱۳۹۳/۲۹	۱۱/۲۵



شکل ۷-مقایسه تراز شبیه‌سازی شده آبخوان آزاد دشت بیرجند در چاه‌های مشاهده‌ای در شرایط قبل و پس از تزریق

نتیجه گیری

در مطالعه حاضر عملکرد مدل عددی تحلیل هم‌هندسی در شبیه‌سازی رفتار یک آبخوان استاندارد در پاسخ به شرایط تخلیه و تغذیه مصنوعی به روش چاه تزریق مورد بررسی قرار گرفت. در این راستا ابتدا شبیه‌سازی تخلیه با دو حلقه چاه برداشت با دبی ۱۱۴۲/۸۵ و ۱۴۲۸/۵۷ مترمکعب بر روز در یک آبخوان استاندارد تعریف گردید. سپس تراز سطح ایستابی در حالت غیرماندگار در آبخوان آزاد دشت بیرجند شبیه‌سازی و صحت مدل ایجاد شده بررسی گردید. نتایج به دست آمده از این شبیه‌سازی نشان داد که مدل تحلیل هم‌هندسی با معیارهای ارزیابی $ME=-0/009$ ، $MAE=0/0111$ و $RMSE=0/146$ در مقایسه با دو مدل عددی تفاضل محدود و اجزاء محدود، با تراز سطح ایستابی آبخوان در حالت واقعی سازگاری بیشتری دارد. همچنین نتایج معیارهای ارزیابی به دست آمده از مدل‌سازی تراز آبخوان دشت بیرجند معادل $ME=-0/033$ ، $MAE=0/372$ و $RMSE=0/229$ در شبیه‌سازی تراز سطح ایستابی را اثبات می‌نماید. پس از اطمینان از صحت مدل، از ۲۰ حلقه چاه تزریق استفاده گردید که این طرح با در نظر گرفتن حجم آب ورودی به آبخوان به میزان ۷۶۳۸/۴۴ مترمکعب در مدت ۱۲ ماه اجرا گردید. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که این مدل عددی قابلیت استفاده در شبیه‌سازی تراز سطح ایستابی قبل و پس از تزریق را دارا می‌باشد. همچنین اجرای طرح تغذیه مصنوعی به روش چاه تزریق سبب بالا آمدن تراز چاه‌های مشاهده‌ای حداکثر به‌طور میانگین به میزان ۶۰/۳۴ سانتی‌متر و حداقل ۱/۲۱۲ سانتی‌متر و نیز کاهش روند افت موجود در آبخوان که در اثر برداشت‌های بی‌رویه ایجاد شده است، می‌گردد. همچنین پیشنهاد می‌گردد با توجه به اثر مثبت تزریق آب به آبخوان در افزایش تراز سطح ایستابی، جهت کاهش افت موجود در تراز آبخوان، با رعایت مسائل کیفی آب و نیز افزایش طول عمر چاه‌های تزریق با جلوگیری از گرفتگی آن‌ها، اجرای این طرح در سال‌های آتی ادامه یابد.

منابع

- پورصالحی، ف.، اکبریور، ا.، هاشمی، س.ر.، ۱۳۹۹. بررسی اثر تغذیه مصنوعی به روش چاه تزریق بر تراز آبخوان آزاد با استفاده از مدل عددی MODFLOW (مطالعه موردی: دشت بیرجند). نشریه آبیاری و زهکشی ایران، ۱۴(۳): ۹۲۲-۹۸۱.
- تاج‌بخش، س.م.، معماریان، ه.، پارسا صدر، ح.، ۱۳۹۹. ارزیابی تأثیر کمی اجرای پروژه‌های آبخیزداری بر سطح آب زیرزمینی (مطالعه موردی: پروژه جمعاب). سامانه‌های سطوح آبیگر باران، ۸(۴): ۵۱-۶۲.
- جعفری، ه.، ارجمند شریف، م.، ۱۴۰۰. برآورد تغذیه آب زیرزمینی در آبخوان مشهد-چناران با استفاده از روش نوسانات سطح ایستابی (الگوریتم MRC). هیدروژئولوژی، (انتشار آنلاین از تاریخ ۰۲ شهریور ۱۴۰۰).
- دولابی، ف.، اکبریور، ا.، اکبری، م.، محتشمی، ع.، ۱۳۹۸. شبیه‌سازی عددی تغذیه آب زیرزمینی از طریق چاه تزریق با روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین. نشریه آبیاری و زهکشی ایران، ۱۳(۵): ۱۲۴۶-۱۲۵۶.
- رضایی، س.، جوادی، س.، کردان مقدم، ح.، ۱۳۹۹. ارزیابی راهکارهای مدیریت منابع آب زیرزمینی با استفاده از رویکرد اجزای محدود در شبیه‌سازی عددی. هیدروژئولوژی، ۵(۲): ۳۲-۴۲.
- فرپور، ا.، ۱۳۹۵. ارزیابی کیفی آب زیرزمینی دشت بیرجند با استفاده از مدل MT3D. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، گروه علوم و مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه بیرجند.
- قبادیان، ر.، بهرامی، ز.، ۱۳۹۵. بررسی عددی اعمال سناریوهای کمی و کیفی بر آبخوان دشت خزل استان همدان با مدل‌های MODFLOW و MT3DMS. مرتع و آبخیزداری، مجله منابع طبیعی ایران، ۶۹(۴): ۱۰۴۳-۱۰۶۲.
- کردان مقدم، ح.، بنی‌حبیب، م.ا.، جوادی، سامان، ۱۳۹۶. ارزیابی اثر تغذیه مصنوعی بر تعادل بخشی آبخوان با

- NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg*, 194(39-41): 39-41.
- Bekele, Y.W., Kvarving, A.M., Nordal, S., Kvamsdal, T., 2014. Isogeometric Finite Element Analysis of Single-Phase Darcy Flow in Porous Media. (Wccm Xi).
- Shahrokhbabadi, S., Vahedifard, F., Bhatia, M., 2017. Head-based Isogeometric Analysis of transient flow in unsaturated soils. *Computers and Geotechnics*, 84: 183-197.
- Shahrokhbabadi, S., Vahedifard, F., Bhatia, M., 2017. A fast-convergence solution for modeling transient flow in variably saturated soils using the Isogeometric Analysis. *Geotechnical Special Publication, (GSP 280)*. 756-765.
- Peigl, L., Tiller, W., 1997. *The NURBS Book*. 2nd edition. Springer. NewYork.
- Shahrbanozadeh, M., Barani, G.A., Shojaee, S., 2014. Simulation of flow through dam foundation by Isogeometric method. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 18(2): 185-193.
- Sadeghi-tabas, S., Samadi, S.Z., Akbarpour, A., PourrezaBilondi, M., 2016. Sustainable groundwater modeling using single-and multi-objective optimization algorithms. *Journal of Hydroinformatics*, 18(5): 1-18.
- Illangasekare, TH., Doll, P., 1989. A discrete kernel method of characteristics model of solute transport in water table aquifers. *Water Resour. Res*, 25(5): 857-867.
- Anderson, M., Woessner, W., Hunt, R., 2015. *Applied Groundwater Modeling Second Edition: Simulation of Flow and advective Transport*. 2nd. Academic Press. 133-135.
- استفاده از شاخص پایداری. اکوهیدرولوژی، ۴(۴): ۱۲۴۱-۱۲۵۳.
- کلانتری، م.، اکبرپور، ا.، خطیبی‌نیا، م.، ۱۳۹۶. توسعه مدل دوبعدی جریان آب زیرزمینی با استفاده از روش ایزوژئومتریک در آبخوان آزاد. نشریه آبیاری و زهکشی ایران ۱۱(۶): ۱۱۶۲-۱۱۷۶.
- محتشمی، ع.، اکبرپور، ا.، ملازاده، م.، ۱۳۹۶. مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد در حالت ماندگار به روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین. مجله مهندسی مکانیک مدرس، ۱۷(۲): ۳۹۳-۴۰۳.
- همراز، ب.س.، اکبرپور، ا.، پوررضابیلندی، م.، ۱۳۹۴. تحلیل عدم قطعیت پارامتری مدل MODFLOW توسط روش GLUE (مطالعه موردی: دشت بیرجند). نشریه پژوهش‌های حفاظت آب‌و‌خاک. ۲۲(۶): ۶۱-۷۹.
- Zhang, W., Huan, Y., Yu, X., Liu, D., Zhou, J., 2015. Multi-component transport and transformation in deep confined aquifer during groundwater artificial recharge. *Journal of Environmental Management*, 152: 109-119.
- Asano, T., 1985. *Artificial recharge of groundwater*. Boston. MA. USA: Butterworth Publishers.
- Kulkarni, N.H., 2015. Numerical simulation of groundwater recharge from an injection well. *International Journal of Water Resources and Environmental Engineering*, 7(5): 75-83.
- Ghazaw, Y.M., Ghumman, A.R., Al-Salamah, I., Khan, Q.U.Z., 2014. Investigations of Impact of Recharge Wells on Groundwater in Buraydah by Numerical Modeling. *Arab J Sci Eng*, 39: 713-724.
- Karim, I.R., Abbdali, A.M., 2017. Artificial Recharge of Groundwater by Injection Wells (Case Study). *International Journal Of Scientific Engineering and Technology Research*, 31(6): 6193-6196.
- Shi, X., Jiang, S., Xu, H., Jiang, F., He, Z., Wu, J., 2016. The effects of artificial recharge of groundwater on controlling land subsidence and its influence on groundwater quality and aquifer energy storage in Shanghai, China. *Environmental Earth Sciences*, 75(3): 1-18.
- Kagan, P., Fischer, A., Bar-Yoseph, P.Z., 1998. New B-Spline finite element approach for geometrical design and mechanical Analysis. *Int. J. numer. Methods Engrg*, 41: 435-458.
- Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y., 2005. *Isogeometric Analysis: Cad, finite elements,*